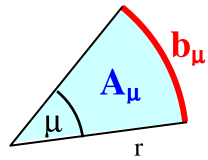
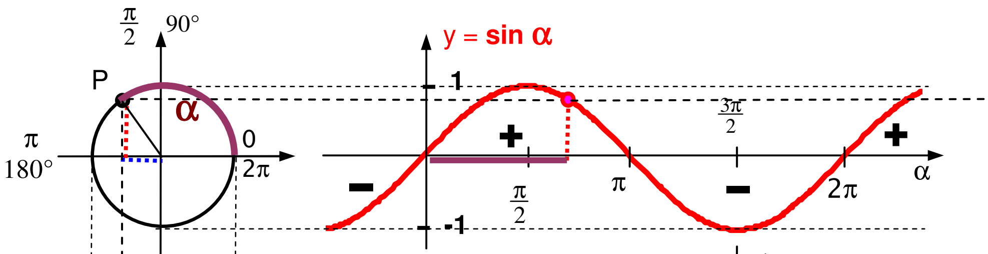
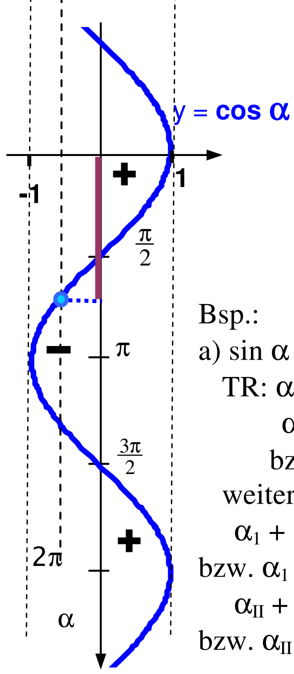
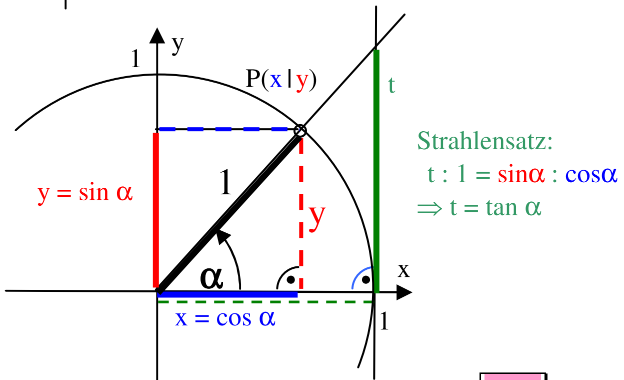
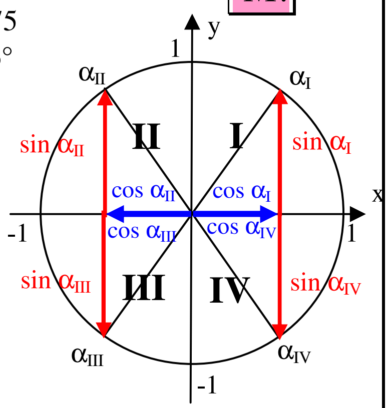
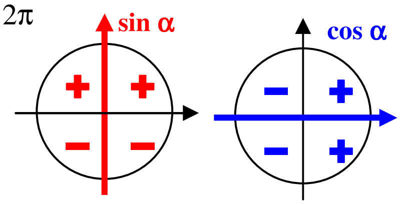
| Gymnasium Stein | Grundwissenkatalog Mathematik | Jahrgangsstufe 10 |
|---|---|---|

Zusammenhänge, die man **nicht** in der "**Merkhilfe**" findet, sind mit ~~M~~! markiert;

| Wissen / Können | Beispiele |
|---|---|
| **Kugel:**<br>**Volumen** $V = \frac{4}{3}r^3\pi$<br>$V \sim r^3$ → Tipp: Einheit = $m^3$;…<br>**Oberfläche** $O = 4r^2\pi$<br>$O \sim r^2$ → Tipp: Einheit = $m^2$;…<br>Anwendung in Sachzusammenhängen | Der Radius einer Kugel wird verdreifacht. Wie ändern sich dadurch Volumen und Oberfläche der Kugel?<br>$r' = 3r \Rightarrow V' = \frac{4}{3}(r')^3\pi = \frac{4}{3}(3r)^3\pi = 27\cdot\frac{4}{3}r^3\pi = 27\cdot V$ kurz: $V \sim r^3$<br>$O' = 4(r')^2\pi = 4\cdot(3r)^2\pi = 9\cdot 4r^2\pi = 9\cdot O$ kurz: $O \sim r^2$<br>Berechne die Oberfläche einer Kugel mit Inhalt 1,0 Liter!<br>$V = \frac{4}{3}r^3\pi = 1\,dm^3 \Rightarrow r = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} dm \Rightarrow O = 4\cdot\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} dm^2\,\pi \approx 4{,}8\,dm^2$ |
| **Sektorfläche und Bogenlänge;** ~~M~~!<br>**Bogenmaß** von Winkeln als Bogenlänge zum Radius 1 :<br>$\alpha(\text{Bogen}) = \frac{\pi}{180°}\cdot\alpha(\text{Grad})$ | $A_{360°} = r^2\pi$ und $A_\mu \sim \mu \Rightarrow A_\mu = \frac{\mu}{360°}r^2\pi = \frac{1}{2}b_\mu r$<br>$b_{360°} = 2r\pi$ und $b_\mu \sim \mu \Rightarrow b_\mu = \frac{\mu}{360°}2r\pi = \frac{\mu}{180°}r\pi$<br><br>**360° ≙ 2π** ⇒ 180° ≙ π ≈ 3,14 ; $\frac{\pi}{2}$ ≙ 90°; $\frac{\pi}{3}$ ≙ 60° ; $\frac{\pi}{4}$ ≙ 45° usw. |
| **Sinus und Kosinus für beliebige Winkel:** ~~M~~!<br>P(x I y) sei der zum Winkel α gehörende Punkt auf dem Einheitskreis →<br>**sin α = y- Koordinate von P**<br>cos α = x- Koordinate von P<br>$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ bzw.<br>tan α = „Tangentenabschnitt“<br>*Definitionen im rechtwinkligen Dreieck (nur für 0° < α < 90°) → gwk 9. Klasse!*<br>**Taschenrechner** (TR) auf verwendetes Winkelmaß einstellen:<br>**Bogenmaß → RAD**<br>**Gradmaß → DEG**<br>*Bei den Graphen von Sin- und Cos-Funktion wird der Winkel α im Bogenmaß angetragen; Bezeichnung dann sonst üblicherweise x statt α*<br>**Umkehrfunktionen am TR:** ~~M~~!<br>SHIFT sin liefert einen zu sinα gehörenden Winkel α , jedoch nur die eine Lösung mit -90° ≤ α ≤ 90°.<br>SHIFT cos liefert ebenfalls nur die Lösung mit 0°≤ α ≤ 180°.<br>Es gibt aber immer unendlich viele Lösungen (⇔ Periode 2π): die gestrichelten „Projektions-linien" in der Grafik schneiden die Sinuslinie bzw. die Kosinus-linie unendlich oft.<br>In [0°;360°] gibt es i.A. 2 Lösungen. | <br><br><br>Bsp.:<br>a) sin α = 0,7<br>TR: $\alpha_I$ ≈ 44,4° bzw. 0,775<br>$\alpha_{II}$ = 180° – $\alpha_I$ ≈ 135,6°<br>bzw. π – $\alpha_I$ ≈ 2,37<br>weitere Lösungen:<br>$\alpha_I$ + 360° ≈ 404,4° usw.<br>bzw. $\alpha_I$ + 2π ≈ 7,06 usw.<br>$\alpha_{II}$ + 360° ≈ 495,6° usw<br>bzw. $\alpha_{II}$ + 2π ≈ 8,65 usw.<br>~~M~~!<br><br>b) cos α = 0,7<br>TR: $\alpha_I$ ≈ 45,6°<br>$\alpha_{IV}$ = 360° – $\alpha_I$ ≈ 314,4°<br>c) sin α = – 0,7<br>TR: –$\alpha_I$ ≈ –44,4°<br>$\alpha_{IV}$ = 360° – $\alpha_I$ ≈ 315,6°<br>$\alpha_{III}$ = 180° + $\alpha_I$ ≈ 224,4°<br>d) cos α = – 0,7<br>TR: $\alpha_{II}$ ≈ 134,4°<br>$\alpha_{III}$ = 360° – $\alpha_{II}$ ≈ 225,6°<br>e) cos α = – 1<br>⇒ α = 180° + k · 360°<br>bzw. α = π + k · 2π<br>**Vorzeichenübersicht:**<br> |

**Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei komplexen mehrstufigen Zufallsexperimenten** mit Hilfe von **Pfadregeln in Baumdiagrammen** oder mit einer **Vierfeldertafel** (für 2-stufige Experimente)

*zu Pfadregeln → gwk 9*

**Schreibweisen**: ~~M~~!

$E \cap H$ bedeutet: Das Ereignis E **und** das Ereignis H tritt ein.

$\overline{E}$ = **Gegenereignis** zu E

**Bedingte Wahrscheinlichkeit:**

$\mathbf{P_H(E)}$ = Wskt von E **unter der Bedingung H** = Wskt von E, **wenn** H eintritt

Berechnung der bedingten Wskt entweder "direkt" → oder durch "**Umkehrung der Pfadregeln**" im Baumdiagramm - vgl. Bsp. (weiter unten) ~~M~~!

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten stehen im Baumdiagramm an den Ästen nach den ersten Verzweigungen

*Es handelt sich hier um eine logische und nicht um eine "zeitliche" Bedingung; vgl. "umgekehrt" im Bsp.*

Die **Vierfeldertafel** ist übersichtlicher und immer verwendbar, wenn keine bedingten Wskten gegeben sind.

In **Baumdiagrammen** können im Unterschied zur Vierfeldertafel **auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten direkt eingetragen bzw. abgelesen** werden. → *Wenn bedingte Wskten gegeben sind, dann Baumdiagramm günstiger! (vgl. z.B. Wh.aufgabe Nr. 10 )* Oft ist es dabei nützlich, die **beiden** möglichen **Bäume** zu **kombinieren** (aber nicht immer nötig) - vgl. Bsp.!

---

**Die Wirkung von Hausaufgaben auf die Zeugnisnote** soll in einer Gruppe von 200 Schülern untersucht werden. Man betrachtet dazu die Ereignisse
H = "Ein Schüler macht regelmäßig seine Hausaufgaben in Mathematik"
E = "Erfolg": Der Schüler bekommt in Mathe im Zeugnis mindestens eine 2

**Umfrageergebnis**: 160 Schüler machten ihre Hausaufgabe ⇔ $|H| = 160$
von diesen Schülern hatten 48 Erfolg ⇔ $|E \cap H| = 48$;
38 Schüler hatten keine regelmäßige Hausaufgabe **und** waren nicht erfolgreich ⇔
⇔ $|\overline{E} \cap \overline{H}| = 38$

Eintrag dieser **absoluten Häufigkeiten** (fett gedruckt) in die **Vierfeldertafel T1** und Ergänzung der Tafel ; z.B. $|\overline{E} \cap H| = 160 - 48 = 112$

→ Berechnung der "Laplace-Wskt" *(→gwk8!)* → **Vierfeldertafel T2**
In den inneren grauen Rechtecken stehen die absoluten Häufigkeiten bzw. Wskten der "**und**"-Ereignisse; z.B.: $|\overline{E} \cap \overline{H}| = 38$ ; $P(E \cap H) = 0{,}24$

Absolute Häufigkeiten:

| T1 | H | $\overline{H}$ | gesamt |
|---|---|---|---|
| E | **48** | 2 | 50 |
| $\overline{E}$ | 112 | **38** | 150 |
| gesamt | **160** | 40 | **200** |

: 200 →

Relative Häufigkeiten → Wahrscheinlichkeiten(Wskt):

| T2 | H | $\overline{H}$ | |
|---|---|---|---|
| E | **0,24** | 0,01 | 0,25 |
| $\overline{E}$ | 0,56 | **0,19** | 0,75 |
| | **0,80** | 0,20 | **1** |

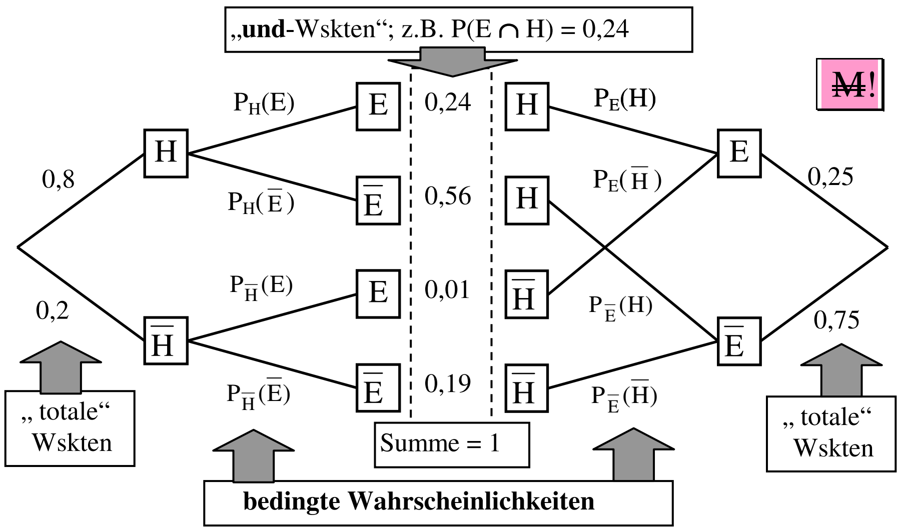
$P_H(E)$ = Wskt, dass ein Schüler Erfolg hatte, **wenn** er Hausaufgaben gemacht hat:

$$T1 \rightarrow P_H(E) = \frac{|E \cap H|}{|H|} = \frac{48}{160} = 0{,}3 \quad \text{bzw.} \quad P_H(E) = \frac{\frac{48}{200}}{\frac{160}{200}} = \frac{0{,}24}{0{,}80} = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} \quad (T2)$$

(Erweitern mit $\frac{1}{200}$)

$$P_{\overline{H}}(E) = \frac{|E \cap \overline{H}|}{|\overline{H}|} = \frac{2}{40} = 0{,}05$$ = Wskt für Erfolg, **wenn** man keine HA macht

umgekehrt: $P_E(H)$ = Wskt, dass ein Schüler die HA gemacht hatte, **wenn** er erfolgreich war $= \frac{|E \cap H|}{|E|} = \frac{48}{50} = 0{,}96$




**Pfadregel**: $0{,}8 \cdot P_H(E) = 0{,}24 \;\Rightarrow\; P_H(E) = \frac{0{,}24}{0{,}8} = 0{,}3$ ("**Umkehrung**")

$0{,}8 \cdot P_H(\overline{E}) = 0{,}56 \;\Rightarrow\; P_H(\overline{E}) = \frac{0{,}56}{0{,}8} = 0{,}7$; **einfacher**: $P_H(\overline{E}) = 1 - P_H(E)$

$P_{\overline{H}}(E) = \frac{0{,}01}{0{,}2} = 0{,}05$; $P_{\overline{H}}(\overline{E}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$; $P_E(H) = \frac{0{,}24}{0{,}25} = 0{,}96$

$P_E(\overline{H}) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$ ; $P_{\overline{E}}(H) = \frac{0{,}56}{0{,}75} = \frac{56}{75} = 0{,}74\overline{6}$ ; $P_{\overline{E}}(\overline{H}) = \frac{19}{75} = 0{,}25\overline{3}$

**Potenzfunktionen** mit natürlichen Exponenten
(→ "wichtige Funktionstypen")
als Bausteine für
**ganzrationale Funktionen**
**Normalform** und
**„Nullstellenform“**

~~M~~! *(ganzer Abschnitt)*

**Bestimmung der Nullstellen** (Nst) mit **Vielfachheit** aus der Normalform durch
**Faktorisieren:**

- Ausklammern → gwk 7
- binomische Formeln → gwk 9
- quadratische Lösungsformel → gwk 9 oder "Vieta"
- Polynomdivision

**Bedeutung der Nullstellen für den Graphen**; speziell für das Vorzeichenverhalten:

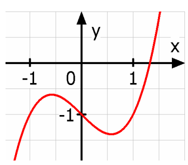
**gerade Vielfachheit ⇔**
**⇔ kein VZW**
(Vorzeichenwechsel)
**ungerade Vielfachheit ⇔**
**⇔ Vorzeichenwechsel**
("Terrassenpunkt" für Vielfachheit ≥ 3)

bei Vielfachheit = 1 schneidet $G_f$ die x-Achse

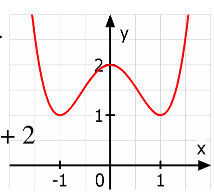
bei Vielfachheit > 1 ist die x-Achse Tangente an $G_f$

**Das Verhalten für $x \to \pm\infty$** wird durch den Summanden mit dem größten Exponenten bei x bestimmt

**Anmerkung:**
Die genaue Lage von "Hoch - und Tiefpunkten" ist i.A. erst in der 11. Klasse bestimmbar.
Dies wird insbesondere wichtig, wenn die grF nicht die Maximalzahl der Nst hat, wie z.B.
$f(x) = x^3 - x - 1$
( ≤ 3 Nst )




oder sogar gar keine Nst hat, wie z.B.
$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$
( ≤ 4 Nst )



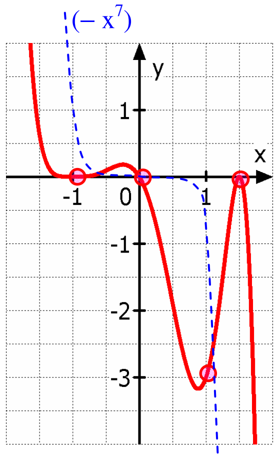

Eine **ganzrationale Funktion (grF)** ist eine reelle Funktion, deren Funktionsterm sich als **Polynom** schreiben lässt, also als Summe aus Potenzen von x, die jeweils mit einem reellen Koeffizienten multipliziert sind.
Der größte Exponent von x heißt **Grad** der grF.

Bsp.: $f(x) = 2x^7 - 3{,}23x^6 + \sqrt{2}\,x - \frac{2}{3}$ (Grad 7)
$g(x) = x^3 + x^2 - 6x$ (Grad 3)
} Polynom als Normalform

Durch **Faktorisieren** erhält man die **Nullstellenform**: $g(x) = x(x-2)(x+3)$
→ Eine grF vom **Grad n** hat **höchstens n Nullstellen**

**Bsp. 1a)** Gegeben: $f(x) = -0{,}75 \cdot x \cdot (x-1{,}5)^2 \cdot (x+1)^4$
Skizzieren Sie den Graph der Funktion!

- „Startwert“ : $f(1) = -0{,}75 \cdot 1 \cdot 0{,}5^2 \cdot 2^4 = -3$
- Nst.: $x_1 = 0$; einfach ⇒ Vorzeichenwechsel (VZW)
  $x_2 = 1{,}5$ ; doppelt ⇒ kein VZW
  $x_3 = -1$ ; 4-fach ⇒ kein VZW
  Vielfachheit 4 > 2 ⇒ flacher als bei x = 1,5
- Ausmultiplizieren ⇒ $f(x) = -0{,}75\,x^7 + \ldots$
  ⇒ Verhalten für $x \to \pm\infty$ wie bei $-x^7$
  also $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$




**Bsp. 1b) "umgekehrt": Gegeben** ist der obige **Graph** einer grF f vom Grad 7. Bestimmen Sie eine Funktionsvorschrift für f !

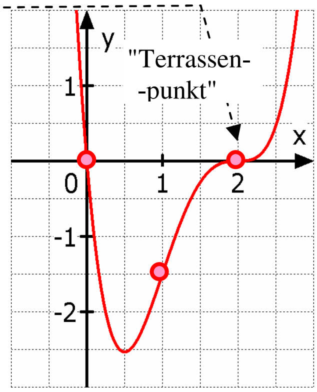
- Nst. (Vielfachheiten beachten!) → $f(x) = a \cdot x \cdot (x-1{,}5)^2 \cdot (x+1)^4$
- einfachen Punkt einsetzen; hier z.B. P(1|–3) → $-3 = a \cdot 1 \cdot (-0{,}5)^2 \cdot 2^4$
  ⇒ $a = -0{,}75$ also $f(x) = -0{,}75 \cdot x \cdot (x-1{,}5)^2 \cdot (x+1)^4$

**Bsp.2a)** $\mathbf{f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4)\,(3x^2 - 6x)}$

Faktorisieren: *bin.Formel; Ausklammern*

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 \cdot 3 \cdot x \cdot (x-2) = \frac{3}{2}x(x-2)^3$

$f(x) = 1{,}5x^4 + \ldots$ ⇒ Verhalten für $x \to \pm\infty$ wie bei $x^4$
"Startwert" z.B.: f(1) = … –1,5




**Bsp.2b) umgekehrt:** $G_f \to f(x) = ?$ analog wie 1b)

**Bsp. 3)** $f(x) = 2x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2$ (Normalform)
Bekannt sei weiter, dass x = 1 eine Nst von f ist (oder: "Probieren")

- Faktorisieren : $f(x) = x^2\,(2x^3 - x^2 - 4x + 3)$
- x = 1 ist Nst → f enthält den Linearfaktor (x – 1)
  → weiter Faktorisieren durch **Polynomdivision**:

$(2x^3 - x^2 - 4x + 3) : (x - 1) = 2x^2 + x - 3$
$\underline{2x^3 - 2x^2}$
$\quad x^2 - 4x$
$\quad \underline{x^2 - x}$
$\qquad -3x + 3$
$\qquad \underline{-3x + 3}$
- - - - - -

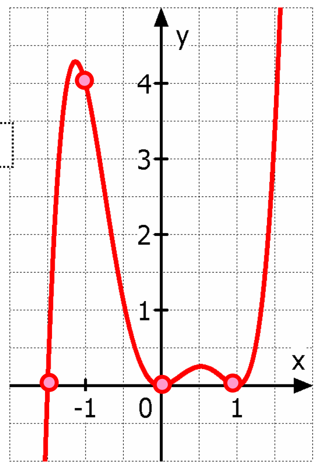
⇒ $f(x) = x^2\,(x-1)\,(2x^2 + x - 3)$

weiter Faktorisieren hier mit quadratischer Lösungsformel

$2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{1+24}\right)$;
$x_1 = 1$ ; $x_2 = -1{,}5$

also: $f(x) = x^2\,(x-1) \cdot 2\,(x-1)(x+1{,}5) =$
$= 2x^2\,(x-1)^2\,(x+1{,}5)$ (Nullstellenform)

Verhalten für $x \to \pm\infty$ wie bei $x^5$ ; evtl. noch f(–1) = 4
} → Grobskizze von $G_f$



## Exponentialfunktionen

zur Modellierung von exponentiellem Wachstum: **~~M~~!**

$f(x) = y_0 \cdot a^x$ oder $y_0 = b \cdot a^x$

mit $y_0 = f(0) = b$

und $a$ = Wachstumsfaktor

$a > 1 \;\Leftrightarrow$ Wachstum

$0 < a < 1 \;\Leftrightarrow$ "Zerfall"

Abgrenzung von linearem Wachstum

*Beachte den Unterschied zwischen Exponentialfunktion*

*$f_E(x) = a^x$*

*(Variable im* ***Exponent****) und*

*Potenzfunktion $f_P(x) = x^r$*

*(Variable in der* ***Basis****)*

**Veränderung** einer Größe y während einer „Zeiteinheit" $(\Delta x = 1)$

a) **um das α-fache des ~~aktuellen~~ vorherigen** Werts y(x) :

$\Delta y = y(x+1) - y(x) = \alpha \cdot y(x) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\Delta y \sim y} \;\neq$ const.

$\rightarrow$ **exponentielles Wachstum**: $y = y_0 \cdot (1+\alpha)^x \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = y_0 \cdot a^x}}$ $\quad$ $\boldsymbol{(a = 1 + \alpha)}$

b) **um das α-fache des Anfangswerts $y_0$**: $\boldsymbol{\Delta y = \alpha \cdot y_0 = \text{const}}$ !

$\rightarrow$ **lineares Wachstum**: $y = y_0 + \alpha \cdot y_0 \cdot x \qquad \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = y_0 + m \cdot x}}$ $\quad (m = \alpha \cdot y_0)$

Bsp.1) Ein Kapital von 2000 € wird mit 8 % p.a. (pro Jahr) verzinst:

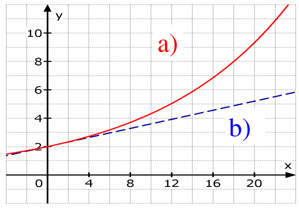
$f(x)$ = Kapital in 1000 € ; $x$ = Zahl der Jahre

a) Verzinsung mit Zinseszins

$\rightarrow f_a(x) = 2 \cdot (1 + 0{,}08)^x = 2 \cdot 1{,}08^x$ (expon. W.)

b) Die Zinsen werden nicht mitverzinst

$\rightarrow f_b(x) = 2 + 0{,}08 \cdot 2 \cdot x = 2 + 0{,}16\,x$ (lin. W.)




Bsp.2) Zahl der Jod 131 – Kerne in in einem radioaktiven Päparat in Abhängigkeit von der Zahl x der Tage: $\quad f(x) = 2{,}7 \cdot 10^{15} \cdot 0{,}917^x$

$0{,}917 = a = 1 + \alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}917 - 1 = -0{,}083$

$\rightarrow$ Die Zahl der Kerne nimmt pro Tag um 8,3 % ab

---

**$x = \log_a b$ ist die Lösung von $a^x = b$** **~~M~~!**

*in Worten:* $x = \log_a b$ ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten

sprich: Logarithmus von b zur Basis a

**Logarithmus** ist also nur ein anderer Name für **Exponent!**

$\rightarrow$ Die **Rechenregeln für Logarithmen** *($\rightarrow$ Merkhilfe)* sind dieselben Regeln wie für Potenzen *($\rightarrow$ gwk 9 )*

- nur in neuer Schreibweise$\rightarrow$

Die "**Umkehraufgabe**" zu Bsp.2) wird mit dem **Logarithmus** gelöst:

Nach welcher Zeit halbiert sich die Zahl der Kerne? ("Halbwertszeit" = ?)

$\rightarrow 0{,}5 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{15} = 2{,}7 \cdot 10^{15} \cdot 0{,}917^x \quad \rightarrow 0{,}5 = 0{,}917^x \quad \rightarrow x = \log_{0{,}917} 0{,}5 = 7{,}99 \ldots$

$\rightarrow$ Die Halbwertszeit beträgt etwa 8 Tage *(TR!)*

**Logarithmenwerte ohne TR**: Def. $\Rightarrow \log_a a^x = x$ und $a^{\log_a x} = x$

weiter $\log_a 1 = 0$ für alle $a > 0$

$\log_3 81 = 4$; denn $3^4 = 81$ *(mit welcher Zahl muss man 3 potenzieren, um 81 zu erhalten)*

$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1; \quad \lg 0{,}001 = \log_{10} 10^{-3} = -3; \quad \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$ | $\Leftrightarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ | $(u = a^x ; v = a^y)$ |
| 2) $\log_a(u : v) = \log_a u - \log_a v$ | $\Leftrightarrow a^x : a^y = a^{x-y}$ | dabei jeweils $u>0$; $v>0$; $a>0$ $a \neq 1$ |
| 3) $\log_a u^z = z \cdot \log_a u$ | $\Leftrightarrow (a^x)^z = a^{z \cdot x}$ | |

---

**Exponentialgleichungen** sind Gleichungen mit der Unbekannten x im Exponent.

Lösung durch **Logarithmieren** auf beiden Seiten **~~M~~!**

***Funktionsgraphen** $\rightarrow$ Blatt **"wichtige Funktionstypen"***

Bsp.: $\lg(100\,a^3) = \lg 100 + \lg a^3 = 2 + 3 \lg a$; $\quad \log_2(2a + 3)$ ist nicht zerlegbar

a) $4^{3x} = 2 \cdot 5^{2x} \quad | \lg(..)$

$3x \cdot \lg 4 = \lg 2 + 2x \cdot \lg 5$

$x \cdot (3 \lg 4 - 2 \lg 5) = \lg 2$

$x = \dfrac{\lg 2}{3 \lg 4 - 2 \lg 5} \approx 0{,}737$

b) $6 \cdot 6^{4x} = 36^{x+1}$

$6^{4x+1} = 6^{2(x+1)} \quad | \log_6(..)$

$4x + 1 = 2x + 2$

$x = 0{,}5$

*(oder wie a) )*

*Hier mit passender Basis Lösung ohne TR möglich!*

---

**Einfluss von Parametern** auf Funktionsgraphen: **~~M~~!**

**a) $g(x) = a \cdot f(x)$** $\Leftrightarrow$ Streckung in y-Richtung mit Faktor a

**b) $g(x) = f(b \cdot x)$** $\Leftrightarrow$ Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$

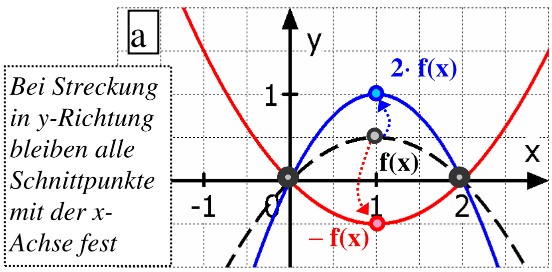
**c) $g(x) = f(x + c)$** $\Leftrightarrow$ Verschiebung in x -Richtung um – c

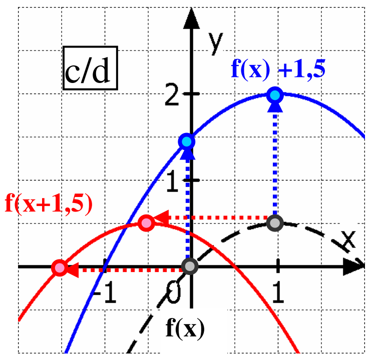
**d) $g(x) = f(x) + d$** $\Leftrightarrow$ Verschiebung in y -Richtung um d

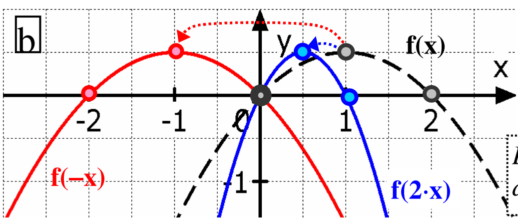
"Bei x alles umgekehrt"

Spezialfall von a) :

**$g(x) = -f(x) \;\Leftrightarrow$ Spiegelung an der x-Achse**




Spezialfall von b) :

**$g(x) = f(-x) \;\Leftrightarrow$**

**$\Leftrightarrow$ Spiegelung an der y-Achse**

*Bei Streckung in x-Richtung bleibt der Schnittpunkt mit der y-Achse fest*

# Allgemeine Eigenschaften von Funktionen

*Achsenpunkte und Definitionsmenge → gwk8 und gwk9 ; Wiederholungsaufgaben*

## Symmetrie des Graphen

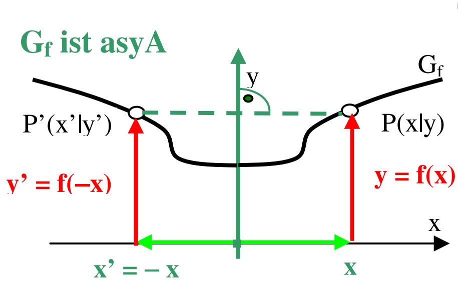
**a) bezüglich des Koordinatensystems**

M!

$G_f$ ist **achsensymmetrisch** zur y-Achse (asyA)

$\Leftrightarrow$ **f(−x) = f(x)**

*(für alle x ∈ **D**)*



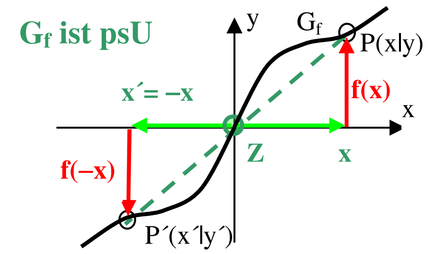

**Typische Vertreter:**

- f(x) = cos x
- Ganzrationale Funktionen mit lauter **geraden** Exponenten
  Bsp.: $f(x) = 4x^6 - 3x^2 + 6\ (\cdot x^0)$
  *Funktionen mit einem Graphen, der asyA ist, heißen deshalb auch* ***gerade*** ***Funktionen***

$G_f$ ist **punktsymmetrisch** zum Ursprung (psU)

$\Leftrightarrow$ **f(−x) = − f(x)**

*(für alle x ∈ **D**)*




- f(x) = sin x
- Ganzrationale Funktionen mit lauter **ungeraden** Exponenten
  Bsp.: $f(x) = x^7 - 3x^3 + 0{,}5x$
  *Funktionen mit einem Graphen, der psU ist, heißen deshalb auch* ***ungerade*** ***Funktionen***

**Produkte** (analog für **Quotienten**) :

M!

**"asyA · asyA = asyA"**
( " + · + = + " )

**" psU · asyA = psU "**
( " − · + = − " )

**" psU · psU = asyA"**
( " − · − = + " )

Bsp.: f(x) = x· sin(x) $G_f$ ist asyA (" − · − = + ")
f(x) = x· cos(x) $G_f$ ist psU (" − · + = − ")

$f(x) = \dfrac{x^4 - 2}{x^3 + 2x}$ $G_f$ ist psU (" $\frac{+}{-}$ = − ") ; $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 2}$ $G_f$ ist asyA (" $\frac{+}{+}$ = +")

**b) allgemeine Symmetrien**

**Durch eine Verschiebung** des Graphen (→ *Parametereinfluss c/d* ) werden Symmetrieachse bzw. Symmetriezentrum mit verschoben → *Whaufgabe Nr. 24*

## Verhalten für x → ± ∞

M!

**a)** Wenn sich die Funktionswerte einer Funktion f "für sehr große x nur noch beliebig wenig von der Zahl a unterscheiden" , dann sagt man:

**f konvergiert gegen a**

oder

**Der <u>Grenzwert</u> von f für x → ∞ ist a**

kurz: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$

$G_f$ hat dann die **waagrechte Asymptote y = a**

***Analog für x → − ∞***

Wichtiger Spezialfall: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0}$ ⇔ die <u>x-Achse ist Asymptote</u> zu $G_f$

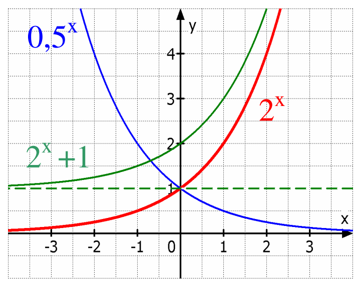
Bsp.: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$ ; kurz: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$ ; allg.: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^r} = 0\ (r > 0)$

→ *gwk8;* → *wichtige Funktionstypen*

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$ ; aber $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x = \infty$ ;

$\lim\limits_{x\to\infty} 0{,}5^x = 0$ ; aber $\lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}5^x = \infty$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x + 1 = 0 + 1 = 1$ ; $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x + 1 =$ "$\infty + 1$" $= \infty$

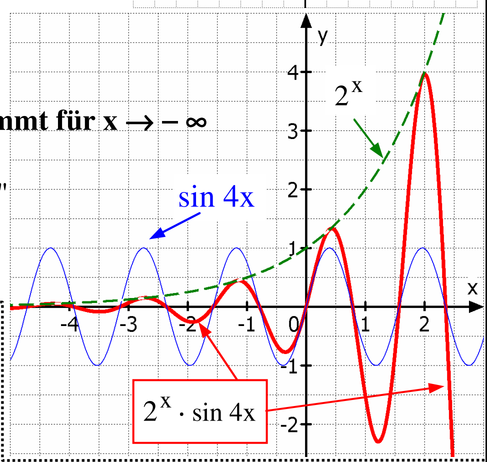



Wenn f für x→ ∞ **nicht konvergiert**, dann sagt man:
**f divergiert für x → ∞.**
Hier gibt es 2 Fälle *(vgl. Bsp.)*:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x \cdot \sin 4x = 0$ , denn

**g(x) = sin 4x divergiert** zwar **unbestimmt für x → − ∞**
( ebenso wie für x → ∞) ,
ist aber "**beschränkt**" ⇒ "$2^x$ gewinnt"

- **unbestimmte Divergenz von**
$f(x) = 2^x \cdot \sin 4x$ für **x → ∞**




**b) Bestimmte Divergenz:**

M!

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ bzw.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

als symbolische Schreibweise dafür, dass der Graph "nach oben bzw. nach unten verschwindet"

***Analog für x → − ∞***

**c) Unbestimmte Divergenz**

Spezialfall **rationale** Fkt.: $f(x) = \dfrac{z(x)}{n(x)}$

als Quotient zweier ganzrationalen Fkt. mit Zählergrad = z und Nennergrad = n

- n > z ⇒ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ("Nenner gewinnt")
- n < z ⇒ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x)| = \infty$ (bestimmte Divergenz; "Zähler gewinnt")
- n = z ⇒ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \text{const} \neq 0$

M!

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x - 1}{4x + 2} = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{2}{x}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{2 - 0}{4 + 0} = \dfrac{1}{2}$