Wichtige Funktionstypen

1) Die linearen Funktionen : y = m · x + t
andere Schreibweise **f (x) = m · x + t**

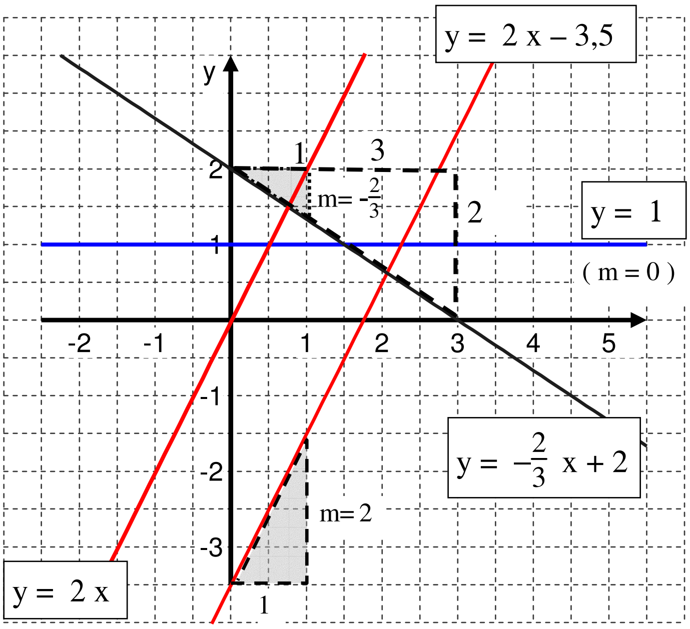
m = Steigung
t = y-Abschnitt

Zeichnen mit Steigungsdreieck vgl. Beispiele →
Die Graphen sind Geraden
a) streng monoton steigend für $m > 0$
b) streng monoton fallend für $m < 0$
c) parallel zur x-Achse für $m = 0$

Nur in der expliziten Form (wie für Funktionen üblich) lassen sich m und t direkt ablesen.
Umrechnung aus der impliziten Form durch Auflösen nach y , im Bsp. für die fallende Gerade:

$2x + 3y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + 2$

(implizit) *(explizit)*



2) Die quadratischen Funktionen :
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ *(Normalform)* bzw.
$y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ *(Scheitelform)* $a \neq 0$

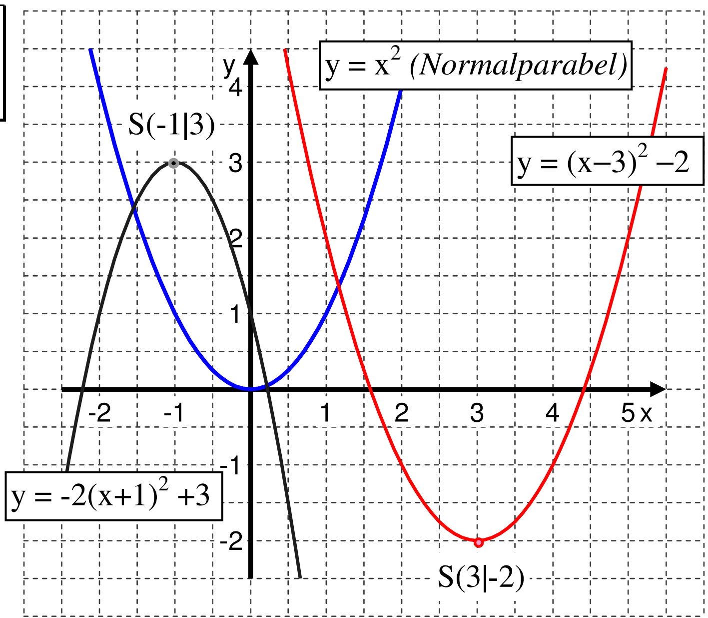
Die Graphen sind Parabeln.
Aus der Scheitelform lassen sich die Koordinaten des **Scheitelpunkts** $S(x_s|y_s)$ direkt ablesen.
Die Parabel entsteht aus der vom Ursprung aus zum Scheitelpunkt S verschobenen Normalparabel durch zentrische Streckung von S aus mit Streckfaktor $\frac{1}{a}$ *; speziell:*

Öffnung der Parabel **nach oben** für $a > 0$
und **nach unten** für $a < 0$

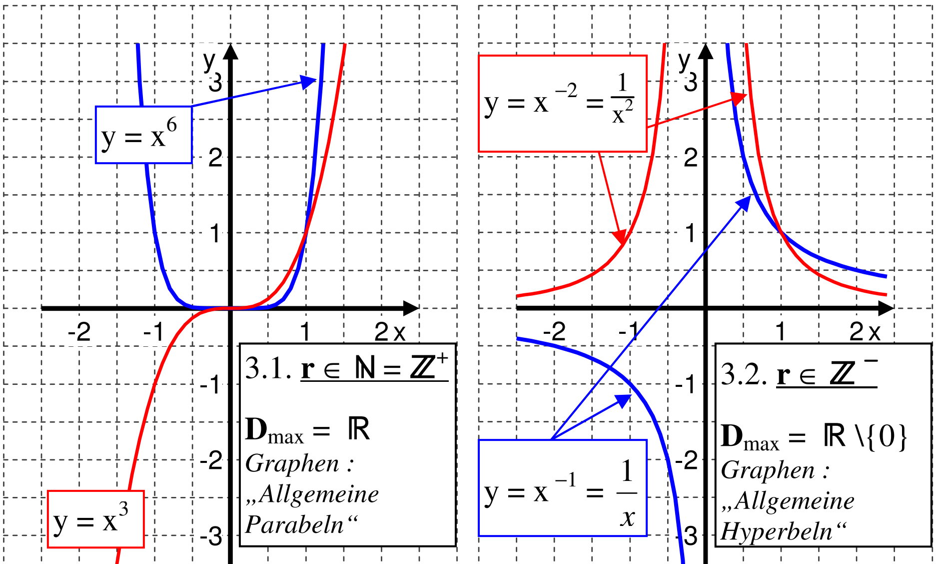
Bestimmung von **S** aus der Normalform als Extrempunkt (*„Infinitesimalrechnung“*):

$y'(x_s) = 0 \quad \Rightarrow 2ax_s + b = 0 \quad \Rightarrow x_s = -\frac{b}{2a}$

oder „quadratische Ergänzung“ → Scheitelform



3) Die Potenzfunktionen : $y = x^r$



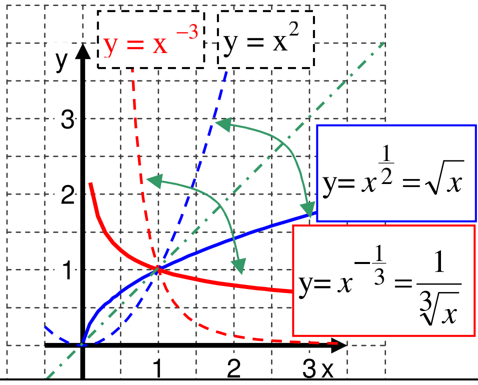
3.1. $r \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$

$D_{max} = \mathbb{R}$
Graphen : „Allgemeine Parabeln“

3.2. $r \in \mathbb{Z}^-$

$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Graphen : „Allgemeine Hyperbeln“

Gerader Exponent r ⇔ Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse
Ungerader Exponent r ⇔ Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung

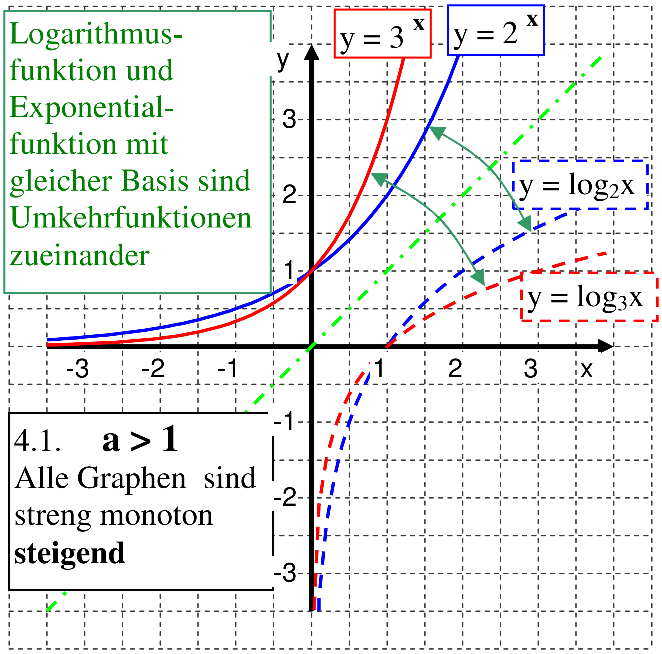


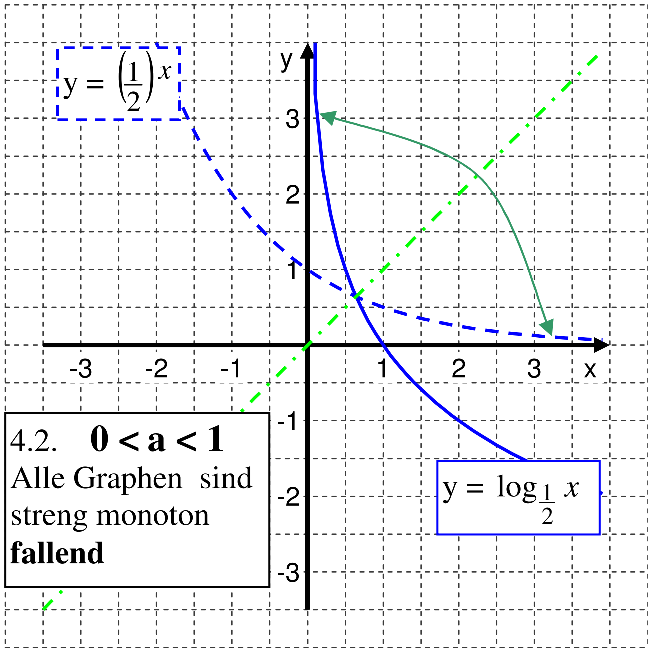
3.3. $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *(nicht ganzzahlig)*

$r < 0 \Rightarrow D_{max} = \mathbb{R}^+$ **$r > 0 \Rightarrow D_{max} = \mathbb{R}^+_0$**

Für „$r = \frac{1}{n}$“ allgemeine Wurzelfunktion :
Umkehrfunktion zu der (eingeschränkten) Funktion mit $y = x^n$ aus 3.1. oder 3.2.
Bsp.: Wurzelfunktion = Umkehrfunktion der auf $\mathbb{R}^+_0$ *eingeschränkten Quadratfunktion*

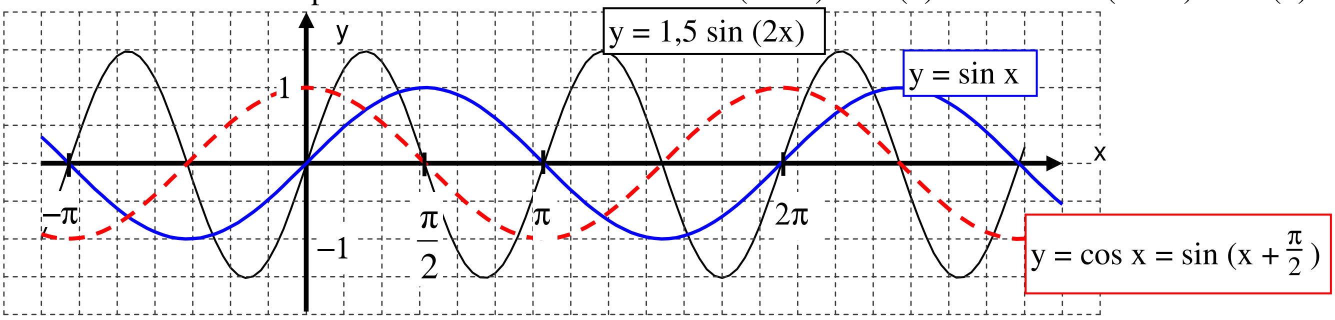
4) Die **Exponentialfunktionen**: **$y = a^x$** ; $D_{max} = \mathbb{R}$ und
die **Logarithmusfunktionen** : **$y = \log_a x$** ; $D_{max} = \mathbb{R}^+$ $a \in \mathbb{R}^+$





5) Die **trigonometrischen Funktionen** : **$y = \sin x$** und **$y = \cos x$**

Beide Funktionen sind periodisch mit Periode 2π : $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$



Verallgemeinerung : $\boxed{y = a \cdot \sin(b \cdot x + c)}$

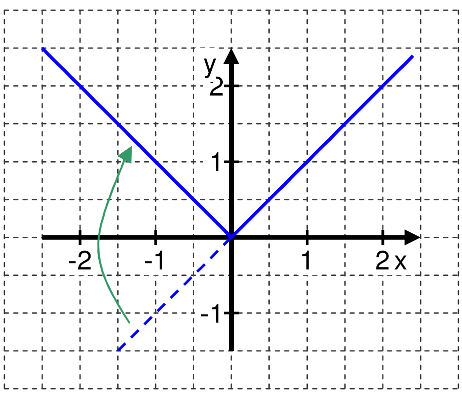
a = „Amplitude“ → Streckung in y-Richtung

b = „Frequenz“ → Streckung in x-Richtung (Veränderung der Periode :
Bsp.: $y = 1{,}5 \sin(2x)$ hat die Periodenlänge $2\pi : 2 = \pi$)

c → „Phase“ → Verschiebung in x-Richtung (um $-\frac{c}{b}$) *Bsp.: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$*

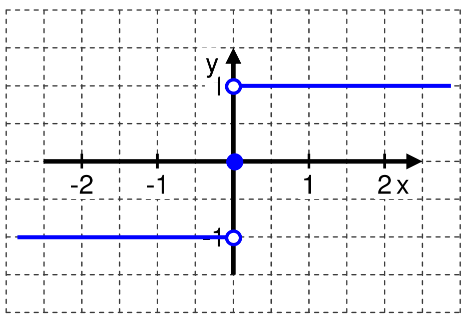
Tipp: Betrachte die Verschiebung der „Ursprungsnullstelle“: $\sin 0 = 0$; Setze also $b \cdot x + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{b}$

6) Die Betragsfunktion : **$y = |x|$**



$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

7) Die Signumfunktion : **$y = \text{sign } x$**



$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$