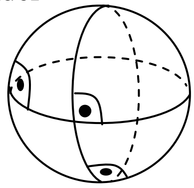
Gymnasium Stein	Wiederholungsaufgaben zum Grundwissenkatalog Mathematik der **10.** Jahrgangsstufe

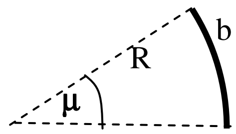
1) Eine Kugel mit Durchmesser 12,0 cm ("idealisierte Orange") wird mit drei zueinander senkrechten Schnitten durch den Kugelmittelpunkt in gleiche Teilkörper zerlegt *(vgl. Skizze).* Berechne Volumen und Oberfläche von einem dieser Teilkörper!



2) Die Oberfläche einer Kugel wird um 36% verkleinert.
Um wie viel Prozent ändern sich dadurch Volumen und „Umfang“ der Kugel?
(Umfang der Kugel = Umfang des größten Schnittkreises)

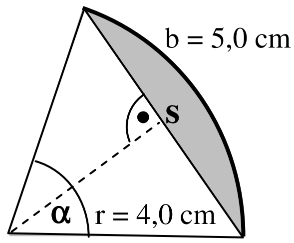
3) Aus einer großen Bleikugel werden 64 gleiche kleine Bleikugeln gegossen.
Um wie viel Prozent verändert sich dadurch die gesamte Oberfläche des Bleis?

4) Geben Sie zu den angegebenen Bogenmaßen jeweils das Gradmaß des Winkels an und umgekehrt: a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{3}{4}\pi$ d) $\frac{3}{4}$ e) 90° f) 15° g) 240°



5) "Bestimmung des Erdradius nach Eratosthenes":
Berechne den Radius R des Kreissektors aus b = 800 km und $\mu = 7{,}2°$!

6) Berechne die Fläche des grau getönten Kreissegments aus dem Radius r = 4,0 cm und der Bogenlänge b = 5,0 cm!
Tipp: Berechne zunächst den Winkel α. Die gestrichelte Höhe im "Restdreieck" und die halbe Sehnenlänge kann man ausrechnen, da man in den rechtwinkligen Teildreiecken jetzt alle Winkel kennt. Jetzt Dreiecksfläche berechnen; aus dieser und der Fläche des Sektors dann die Segmentfläche.



7) Aus der Linkebene des Lehrplans: Oma hat in einer Schublade 18 blaue und 12 andersfarbige Kugelschreiber. Bei sieben blauen Kugelschreibern und bei fünf der anderen ist die Mine eingetrocknet. Oma greift ohne hinzusehen in die Schublade und nimmt einen Kugelschreiber heraus.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit "schreibt er"?
b) Oma hat einen blauen Kugelschreiber aus der Schublade genommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist seine Mine eingetrocknet? *Tipp: Vierfeldertafel!*

8) Aus dem Abitur 2012: Bei einem Spiel werden 2 Kuverts verwendet, die jeweils fünf Spielkarten enthalten. Kuvert 1 enthält genau zwei rote Karten, Kuvert 2 enthält genau drei rote Karten.
Der Showmaster wählt jeweils zufällig zunächst ein Kuvert und aus diesem zwei Karten aus.
a) Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden ausgewählten Karten rot sind, 20% beträgt.
b) Der Showmaster zeigt die beiden ausgewählten Karten, sie sind tatsächlich rot. Bestimmen Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Karten aus Kuvert 2 stammen!

9) Interpretation von Testergebnissen:
- Ungefähr 0,2% der Einwohner einer Stadt sind von einem Virus befallen.
- Die Infektion mit diesem Virus lässt sich vor Ausbruch der Krankheit ziemlich gut durch einen Test nachweisen:
  - Bei einer vom Virus befallenen Testperson fällt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv aus
  - Wenn jemand nicht infiziert ist, fällt der Test bei ihm mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% negativ aus.

Bei Georg fällt der Test positiv aus. Erklären Sie Georg **möglichst einfach und anschaulich**, mit welcher Wahrscheinlichkeit er tatsächlich von dem Virus befallen ist. *Tipp: Verwenden Sie dabei geeignete fiktive absolute Häufigkeiten - für die gesuchte Wskt genügt eine Näherungslösung!*

10) Aus dem Abitur 2003: Bei einem Einstellungstermin für den Polizeidienst waren 40 % der Bewerber Frauen, von denen 90 % die Aufnahmeprüfung bestanden. Drei Viertel derjenigen, die scheiterten, waren männlich. Welcher Anteil der männlichen Teilnehmer hat die Aufnahmeprüfung bestanden? *Tipp: Baum "von 2 Seiten"*

11) **Übersetzungen**: Es geht um eine Krankheit, die man mit einem Diagnoseverfahren zu erkennen versucht. Ereignisse: K = Ein Patient hat diese Krankheit
D = Die Diagnose lautet: „der Patient hat diese Krankheit“

I. Geben Sie jeweils für folgende in Alltagssprache formulierten Wahrscheinlichkeiten (Wskt) die passende mathematische Kurzbezeichnung mit Hilfe der obigen Abkürzungen an:

a) Wskt, dass der Patient die Krankheit hat und die Diagnose falsch ist.
b) Wskt, dass der Patient die Krankheit hat, wenn die Diagnose „krank“ lautet.
c) Der Patient ist krank. Wie groß ist die Wskt, dass die Krankheit auch richtig diagnostiziert wird?
d) Wskt, dass eine falsche Diagnose erstellt wird, wenn der Patient gesund ist.

II. Beschreiben Sie umgekehrt in Worten: e) $P_{\overline{D}}(\overline{K})$ f) $P_K(\overline{D})$ g) $\mathbf{P(K \cap D)}$

12) **Aus dem g8 – Abitur 2011:**
Ein Investor plant, in einer Gemeinde, die aus den Orten Oberberg und Niederberg besteht, eine Windkraftanlage zu errichten. Um sich einen Überblick darüber zu verschaffen, wie die Einwohner zu diesem Vorhaben stehen, beschließt der Gemeinderat, eine Umfrage unter den Wahlberechtigten der Gemeinde durchzuführen. In Niederberg werden 1722, in Oberberg 258 Einwohner befragt. 1089 aller Befragten äußern keine Einwände gegen die Windkraftanlage, darunter sind allerdings nur 27 Einwohner von Oberberg. Die übrigen befragten Personen sprechen sich gegen die Windkraftanlage aus.

a) Bestimmen Sie jeweils den prozentualen Anteil der Gegner der Windkraftanlage unter den Befragten von Niederberg und unter den Befragten von Oberberg.
b) Aus allen Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt. Ermitteln Sie
- die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt und sich gegen die Windkraftanlage aussprach.
- die Wahrscheinlichkeit p_2 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt, wenn bekannt ist, dass sie sich gegen die Windkraftanlage aussprach.

c) Begründen Sie, dass kein Ergebnis der Umfrage denkbar ist, bei dem $p_1 > p_2$ ist

13) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}1\,(x+1)^3\,(2x+5)\,(x-1)^2$
Nur alle Achsenschnittpunkte müssen exakt stimmen; evtl. noch f(–2) berechnen

14) Bestimmen Sie durch geeignete Umformungen alle **Nullstellen** *(mit Vielfachheiten!)* für die Funktion f mit $\mathbf{f(x) = 0{,}1 \cdot x \cdot (3x - 2x^2) \cdot (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4x + 4)}$

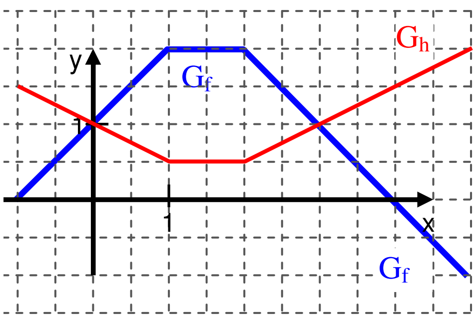
15) Die Graphen der Funktionen g mit $\mathbf{g(x) = 1{,}5x^3 - 2x^2}$
und f mit $\mathbf{f(x) = 2{,}5x^3 + 4x^2 - x - 30}$ schneiden sich an der Stelle $x_1 = 2$.
Berechnen Sie daraus die übrigen Schnittstellen!

16) Was kann man über die Zahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion aussagen, wenn diese
a) den Grad 7 hat b) den Grad 5 hat und der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist
c) den Grad 8 hat d) den Grad 4 hat und der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist

17) a) Gibt es eine Funktion, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist und die x-Achse nicht schneidet?
b) Gibt es eine ganzrationale Funktion, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist und die x-Achse nicht schneidet? *Jeweils Beispiel bzw. Begründung!*

18) Bestimmen Sie die beiden kleinsten positiven Nullstellen der Funktion f
mit $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{4})$!

19) Gegeben sind nebenstehend die Graphen der Funktionen f und h.
a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen
g_1 mit $\mathbf{g_1(x) = f(-2 \cdot x)}$
und g_2 mit $\mathbf{g_2(x) = 1{,}5 \cdot f(x+1)}$
b) Geben Sie auch für die Funktion h eine Vorschrift nach dem Muster aus a) an!

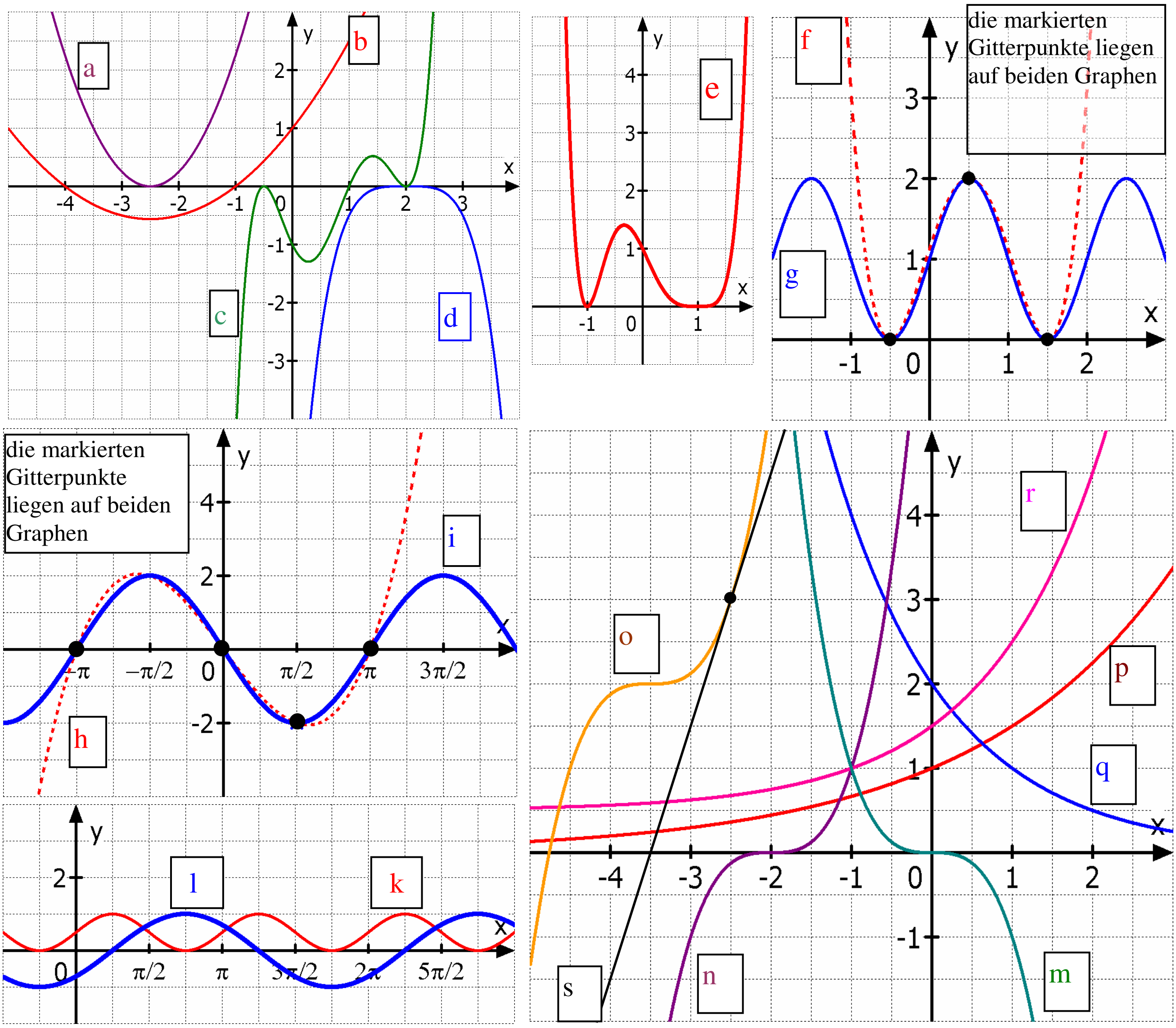


20) Wie muss man jeweils den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 3^x$ **verschieben**, damit

a) der Graph der Funktion g mit $g(x) = 27 \cdot 3^x$ entsteht? *(rechnerische Begründung!)*

b) die zum verschobenen Graphen gehörige Funktion bei $x = -2$ eine Nullstelle hat?

21) Geben Sie jeweils einen Funktionsterm für die folgenden Graphen an:



22) Untersuchen Sie jeweils durch Rechnung, ob eine Symmetrie zum Koordinatensystem vorliegt *(wenn ja: welche?)* : a) $f(x) = \sin x - 2x^3$ b) $f(x) = 0{,}25^x + 4^x$

23) Geben Sie jeweils an, welche Symmetrie zum Koordinatensystem vorliegt!
(jeweils: asyA ; psU oder keine)

a) $f(x) = 4x^{11} + x - 1$ b) $f(x) = x^7 - \sqrt{3}\,x$ c) $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x}$

d) $f(x) = (x^5 + x) \cdot \cos x$ e) $f(x) = x^4 + 5^3$ f) $f(x) = 5^x$

g) $f(x) = 7 \cdot (\sin x)^2$ h) $f(x) = \dfrac{x^5 - 7x}{x^2 + 2}$

24) Gegeben sind 3 Funktionen f, g, und h *(jeweils mit D = IR)* durch
$\mathbf{f(x) = (x-1)^3 + 0{,}5}$; $\mathbf{g(x) = (x+1{,}5)^2 + 0{,}5}$; $\mathbf{h(x) = -(x+1{,}5)^4 + 2(x+1{,}5)^2}$
Die Graphen dieser Funktionen lassen sich so verschieben, dass die verschobenen Graphen eine Symmetrie zum KoSy aufweisen. Geben Sie jeweils die Verschiebung sowie eine Funktionsvorschrift für den verschobenen Graphen und die Art der Symmetrie an!
Welche Symmetrie ergibt sich daraus jeweils für den Graphen der ursprünglichen Funktion?
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, g, und h unter Verwendung dieser Symmetrie!

25) Vereinfachen Sie jeweils so weit wie möglich:

a) $\log_a 6x + \log_a x^2 - 3\log_a 2x$ b) $\log_{a^2}\left(\sqrt[5]{a^6}\right)$

26) Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen in der Grundmenge IR:

a) $\lg\sqrt{x} = 6 + \lg x^2$ b) $3^{2x} = 2 \cdot 5^{x+1}$ *(Rundung auf 3 Nachkommastellen)*

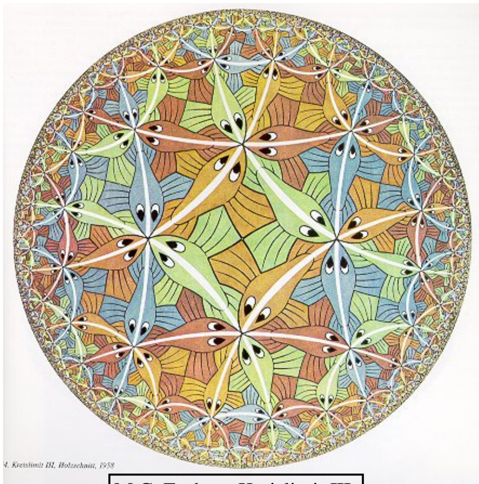
27) a) Wie lange dauert es, bis eine Zellkultur bei einer stündlichen Wachstumsrate von 23% um 400% zugenommen hat? *(auf 2 Nachkommastellen genau)*

b) Ein Kapital von 50 000 € ist bei Verzinsung mit Zinseszins in 15 Jahren auf 93 349 € angewachsen. Berechne den Zinssatz in Prozent! *(auf 2 Nachkommastellen genau)*

28) Zum Graph einer Funktion f gehören die 2 Punkte P (40 | 67) und Q (65 | 95).
Bestimmen Sie jeweils eine Funktionsvorschrift für f , wenn f
a) ein lineares Wachstum beschreibt! b) ein exponentielles Wachstum beschreibt!

29) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{12x^2 - x - 3x^5}{5x^5 + x + 1}$; $D_f = D_{max}$

Bestimmen Sie rechnerisch das Verhalten von f für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$!



M.C. Escher: Kreislimit III

30) Geben Sie das **Verhalten der folgenden Funktionen für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$** an

a) $f(x) = \dfrac{8x^2 + x - x^4}{x^6 + x + 1}$; b) $f(x) = \dfrac{6 + x - x^3}{3x^2 + 5}$

c) $f(x) = x^{-1} \cdot \cos x - 2$; d) $f(x) = 0{,}8^x \cdot \sin(x - 2)$

e) $f(x) = 2 - 4^x$

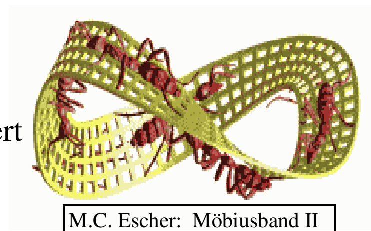
31) Geben Sie jeweils eine (möglichst einfache) **Funktion f mit den vorgegebenen Eigenschaften** an:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0{,}5$;

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0{,}5$; $f \neq const.$; G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

d) Die Punkte A(2|0) ; B(−1|0) und C(3|0) liegen auf G_f ; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

e) f divergiert unbestimmt für $x \to \pm\infty$;
der Graph von f liegt vollständig unter der x-Achse;
der kleinste Funktionswert ist um 6 kleiner als der größte Funktionswert

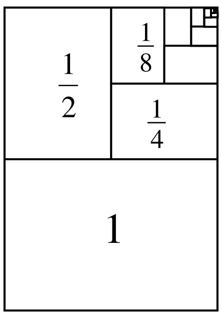


M.C. Escher: Möbiusband II
("der unendlich lange Weg der Ameisen" $\to \infty$)

32) Skizzieren Sie die Graphen von $g(x) = \sin(4x)$ und von $h(x) = \dfrac{1}{x}$

und damit dann den Graphen von $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin 4x$!

Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie zum Koordinatensystem und geben Sie das Verhalten von f für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ an!



33) In der nebenstehenden Figur sind alle (unendlich vielen) "DinA–Rechtecke" aneinandergesetzt. *(Flächen: DinA0 $\to 1m^2$; DinA1 $\to \frac{1}{2}m^2$; DinA2 $\to \frac{1}{4}m^2$; usw.)*

Welche Bedeutung hat die Funktion f mit $f(x) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $D_f = \mathbb{N}_0$ für die Figur? Welche Bedeutung hat hier $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$?