Gymnasium Stein	**Lösungen** zu den Wiederholungsaufgaben zum Grundwissenkatalog Mathematik der **7. Jahrgangsstufe**

1) a) ❶: keine; ❷: 6; ❸: 1; ❹: 2; ❺: keine; ❻: 1; ❼: 3; ❽: 5; ❾: 4
b) ❶; ❷; ❹; ❾

2) a) $(0{,}1x)^2 - 0{,}2x^2 - (-0{,}3x)^2 =$
$= 0{,}01x^2 - 0{,}2x^2 - 0{,}09x^2 =$
$= 0{,}01x^2 - 0{,}29x^2 =$
$= \underline{\underline{-0{,}28x^2}}$

b) $3a^2 - 5a - a(\frac{a}{2} - 6)\cdot 3a - 7a^3 - (-2{,}4a^2) =$
$= 3a^2 - 5a - \frac{3}{2}a^3 + 18a^2 - 7a^3 + 2{,}4a^2 =$
$= \underline{\underline{-8{,}5a^3 + 23{,}4a^2 - 5a}}$

f) $4\frac{3}{5}x^2y - yx \cdot 4{,}6x - 3(2x+y)(3x-2y) =$
$= 4{,}6x^2y - 4{,}6x^2y - 3(6x^2 - 4xy + 3xy - 2y^2) =$
$= \underline{\underline{-18x^2 + 3xy + 6y^2}}$

c) $5x(2\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{5}x) - (x-3)(1+x) =$
$= 5x(\frac{7}{3}x + \frac{7}{5}x) - (x^2 - 3x + x - 3) =$
$= 5x\cdot\frac{56}{3\cdot 5}x - (x^2 - 2x - 3) =$
$= \frac{56}{3}x^2 - x^2 + 2x + 3 =$
$= \underline{\underline{17\frac{2}{3}x^2 + 2x + 3}}$

d) $(x+4)(x^2-3x+1)(0{,}3x - x + \frac{7}{10}x)$
$= x+4)(x^2-3x+1)\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

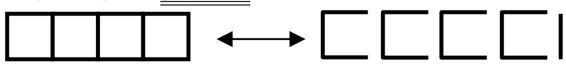
e) $1\frac{1}{6}a \cdot 3a^5 \cdot a^4 - a^7 : a^2 - a^2 =$
$= \underline{\underline{\frac{7}{2}a^{10} - a^5 - a^2}}$

3) $x^2 - (3-x)^2 = x^2 - (9 - 3x - 3x + x^2) = x^2 - 9 + 3x + 3x - x^2 = \underline{\underline{-9+6x}}$ ist richtig, ebenso $\underline{\underline{6x-9}}$

4) a) $48p^2q^3 - 32p^3q = 16p^2q(3q^2 - 2p)$ *(Kontrolle: Ausmultiplizieren ergibt ursprünglichen Term!)*
b) $12x^2 + x - 0{,}6 = -2(-6x^2 - \frac{1}{2}x + 0{,}3)$ *(Dividiere in der Klammer durch –2 !)*
c) $\frac{1}{6} - \frac{1}{3}y - 3z = \frac{1}{6}(1 - 2y - 18z)$ *(Dividiere in der Klammer durch $\frac{1}{6}$ ⇔ multipliziere mit 6!)*
d) $A = \frac{1}{2}a^2 + a\cdot 1cm = \frac{1}{2}a(a + 2cm) = \frac{1}{2}gh$!
→ Wenn a die Grundlinie g ist, dann ist a + 2cm die zugehörige Höhe h_a. Da hier $h_a = b$, gilt $\underline{\underline{b = a + 2cm}}$

5) a) $2x^2y \cdot 4xy^2 = 2xy\cdot x\cdot 4xy^2 = 2xy \cdot 4x^2y^2 \overset{!}{=} 2xy\cdot\Delta \Rightarrow \underline{\underline{\Delta = 4x^2y^2}}$
b) $2(z+z) - \frac{1}{2}(z\cdot z) = 2\cdot 2z - \frac{1}{2}\cdot z\cdot z = z(4 - \frac{1}{2}z) \overset{!}{=} z(\Delta - \Diamond\ z) \Rightarrow \underline{\underline{\Delta = 4}}$ und $\underline{\underline{\Diamond = \frac{1}{2}}}$

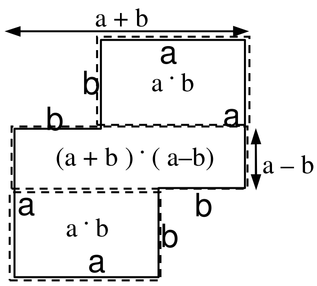
6) a) $V(a) = 4a\cdot 2{,}5a\cdot a = \underline{\underline{10a^3}}$; $O(a) = 2\cdot(4a\cdot 2{,}5a + 4a\cdot a + 2{,}5a\cdot a) = \ldots = \underline{\underline{33a^2}}$
b) 1 Quadrat : $A(1) = 4$; 2 Quadrate : $A(2) = 4 + 1\cdot 3$; 3 Quadrate : $A(3) = 4 + 2\cdot 3$ usw. ….
allgemein: n Quadrate : $A(n) = 4 + (n-1)\cdot 3 = 4 + 3n - 3 = \underline{\underline{3n + 1}}$
darauf kann man auch direkt kommen (hier für n = 4):



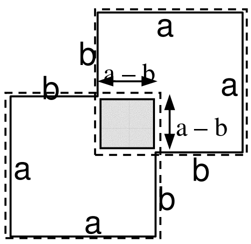
7) a) j ist vier mal so groß wie m: $\boxed{☒\ j = 4m}$ $|:4$ ⇔ $\boxed{☒\ m = 0{,}25j}$
⇔ $j + m = 4m + m = 5m$, also $\boxed{☒\ j + m = 5m}$
b) j ist um 20 % kleiner als m ⇔ $j = m - 0{,}2m$ ⇔ $\boxed{☒\ j = 0{,}8m}$ ⇔ $j = \frac{4}{5}m \mid \cdot\frac{5}{4}$
⇔ $\boxed{☒\ j = m - \frac{1}{5}m}$ ⇔ $\boxed{☒\ m = \frac{5}{4}j}$

8) a) Alfred: $T_1(a;b) = 4a + 4b$ ist falsch (keine Fläche, sondern Länge; Verwechslung mit Umfang)
Christian: $T_3(a;b) = 4ab + b^2$ ist falsch, weil zu groß (vergleiche mit Bianca´s Bild)

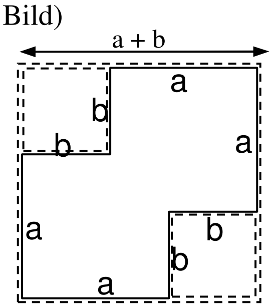
b)



Bianca: Summe der gezeichneten Teilflächen
→ (a + b)(a –b) + 2ab



Dora: Das kleine Quadrat wird beim Addieren der beiden großen Quadratflächen ($2a^2$) doppelt gezählt → abziehen
→ $2a^2 - (a-b)^2$



Emil: großes Quadrat – – 2 · kleines Quadrat
→ $(a+b)^2 - 2b^2$

c) Durch Umformen ergibt sich bei allen richtigen Termen : $\mathbf{a^2 - b^2 + 2ab}$ → die Terme sind äquivalent

9) Zahl der Bälle von Jonas: $m - 5 \rightarrow$ Zahl der Bälle von Clarissa : $3 \cdot (m - 5) = 3m - 15$; **richtig also d) und f)**

10) a) $\frac{1}{6}x = \frac{3}{4}x + 14 \mid -\frac{3}{4}x$

$\frac{2}{12}x - \frac{9}{12}x = 14$

$-\frac{7}{12}x = 14 \quad \mid \cdot \left(-\frac{12}{7}\right)$

$x = -\frac{14 \cdot 12}{7} = -\frac{2 \cdot 12}{1}$

$\underline{\underline{x = -24}}$

b) $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x - \frac{5}{12}x = 0$

$x - \frac{12}{12}x = 0$

$0 = 0$; $\underline{\underline{\text{allgemeingültig!}}}$

c) $5x(2x - 7) = 0$;

$\underline{\underline{x_1 = 0 \ ;\ x_2 = 7:2 = 3.5}}$

d) $(x - 1)(x + 2) = -2$

$x^2 + 2x - x - 2 = -2 \mid +2$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 0 \ ;\ x_2 = -1}}$

e) $-2(x - 1)(x + 2) = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 1 \ ;\ x_2 = -2}}$

f) $\frac{1}{2}x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 = 0$

$\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 = 0$

$\frac{1}{2}x^2(x - 7) = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 0 \ ;\ x_2 = 7}}$

g) $1 - 2(3 - x) = 12x : 6$

$1 - 6 + 2x = 2x \mid -2x$

$-5 = 0$; Widerspruch! ↯

$\underline{\underline{\text{nicht lösbar!}}}$

h) $(x - 3)(x - 3) = 3 - x(4 - x)$

$x^2 - 3x - 3x + 9 = 3 - 4x + x^2 \mid -x^2$

$-6x + 9 = 3 - 4x \mid +6x - 3$

$6 = 2x \mid :2$

$\underline{\underline{x = 3}}$

i) $3{,}4x + 8{,}7 = 2x + 6{,}74 \mid -2x - 8{,}7$

$1{,}4x = -1{,}96 \mid : 1{,}4$

$\underline{\underline{x = -1{,}4}}$

k) $3x - (3 - 2x) = 2(x - 1{,}5)$

$3x - 3 + 2x = 2x - 3 \mid -2x + 3$

$3x = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$

l) $2 - (8x - 14) : 2 = x - (5x - 9)$

$2 - (4x - 7) = x - 5x + 9$

$2 - 4x + 7 = -4x + 9$

$9 - 4x = -4x + 9 \mid +4x - 9$

$0 = 0$

$\underline{\underline{\text{allgemeingültig!}}}$

m) $4{,}6(x - 2{,}1) = 4{,}6(3{,}7 - x) \mid : 4{,}6$

$x - 2{,}1 = 3{,}7 - x \mid +x + 2{,}1$

$2x = 5{,}8 \mid :2$

$\underline{\underline{x = 2{,}9}}$

n) $\frac{1}{15}(3x + 7) - 3 = (x - 20) : 15 \mid \cdot 15$

$3x + 7 - 45 = x - 20$

$3x - 38 = x - 20 \mid -x + 38$

$2x = 18 \mid :2$

$\underline{\underline{x = 9}}$

o) $1{,}5(3x - 7{,}1) + 3x = 9(x - 3) + 1{,}5(3x - 7{,}1) \quad \mid -1{,}5(3x - 7{,}1)$

$3x = 9x - 27 \mid -9x$

$-6x = -27 \mid :(-6)$

$x = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

$\underline{\underline{x = 4{,}5}}$

p) $3x - 12 = 4 + 3[1 - (1 - x)]$

$3x - 12 = 4 + 3[1 - 1 + x]$

$3x - 12 = 4 + 3x \mid -3x + 12$

$0 = 16$; Widerspruch ! ↯

$\underline{\underline{\text{nicht lösbar!}}}$

11)	Deniz	Nicole
vorher	5x	x
nachher	5x – 9 – 6	x + 6

$5x - 15 = 2 \cdot (x + 6)$

$5x - 15 = 2x + 12 \mid -2x + 15$

$3x = 27 \mid :3$

$x = 9 \rightarrow \quad 5x = 45$

A.: Deniz hatte 45 Bonbons

12) alt: Länge = x ; Breite = $x - 3$;

Fläche = $x(x - 3)$

neu: Länge = $x - 2$; Breite = $x - 3 + 4 = x + 1$

Fläche = $(x - 2)(x + 1)$

$(x - 2)(x + 1) = x(x - 3) + 18$

$x^2 - x - 2 = x^2 - 3x + 18 \mid -x^2 + 3x + 2$

$2x = 20 \mid :2$

$x = 10$

A.: Die Seitenlängen waren 10cm und 7cm.

13) $\alpha = \beta - 20°$; $\gamma = 2\alpha = 2(\beta - 20°) = 2\beta - 40°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

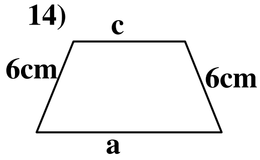
eingesetzt: $\beta - 20° + \beta + 2\beta - 40° = 180°$

$4\beta - 60° = 180° \mid +60°$

$4\beta = 240° \mid :4$

$\underline{\underline{\beta = 60° \Rightarrow \alpha = 40° \ ;\ \gamma = 80°}}$

14)



$a + c + 2 \cdot 6\text{cm} = 32\text{cm} \mid -12\text{cm}$

$a + c = 20\text{cm}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}(a+c)\,h = \frac{1}{2} \cdot 20\text{cm} \cdot 5\text{cm} =$

$= 50\text{cm}^2$

15) Zahl der Plätze im unteren Rang: x

Zahl der Plätze im mittleren Rang: $x + 0{,}2x = 1{,}2x$

Zahl der Plätze im obersten Rang: $1{,}2x - 2000$

$x + 1{,}2x + 1{,}2x - 2000 = 66\,000 \mid +2000$

$3{,}4x = 68\,000 \mid : 3{,}4$

$x = 20000$

A.: Unten sind es 20000, in der Mitte 24000 und oben 22 000 Plätze

16) ***Prinzip: Das Volumen des reinen Safts bleibt gleich*** *(Invarianzprinzip)*

a) Saftvolumen (in l) vor dem Mischen : 0,3 x + 2

Saftvolumen nachher : 0,5 (x + 2) *(50% des Gesamtvolumens)*

→ $\underline{\underline{0{,}3x + 2 = 0{,}5\,(x + 2)}}$ *(→ x = 5)*

b) geht nicht :durch Mischen mit reinem Saft wird der Saftanteil immer höher !

(30% → 20% heißt aber : der Saftanteil wird niedriger)

c) Saftvolumen (in l) vor dem Mischen : 0,3 x

Saftvolumen nachher : 0,2 (x + 4) *(20% des Gesamtvolumens)*

→ $\underline{\underline{0{,}3x = 0{,}2\,(x + 4)}}$ *(→ x = 8)*

17) Um von 50% des alten Kurses wieder „aufs Ganze" (100% des alten Kurses) zu kommen, muss der Kurs **verdoppelt** werden. Verdoppeln bedeutet aber **Steigerung um 100%** (von 100% auf 200%) → c) ist richtig!

18) a) 125,5 *(bei einer geraden Zahl von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist die Mitte zwischen den „mittleren Zahlen" der Mittelwert – Strategie: probiere erst mit weniger Zahlen: bis 2, 3, 4, ...)*

b) $(-5 + 6 - 216 + 206 + x) : 5 = 30 \quad \Leftrightarrow \quad x - 9 = 150 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 159}}$

19) x = „alter Kaffeekonsum" → neuer Kaffeekonsum = 70% von x = 0,7x

neue Kaffeekosten: 130% von 0,7x = $1{,}3 \cdot 0{,}7\,x = 0{,}91\,x = x - 0{,}09x =$ → Sie zahlt 9% weniger!

20) 115% vom Nettopreis = 34,50 € → 1 % vom Nettopreis = 3450ct : 115 = 30 ct

→ MWSt = 15% vom Nettopreis = 30 ct · 15 = 450 ct = 4,50 €

oder mit x = MWSt : $\dfrac{x}{15\%} = \dfrac{34{,}50\,€}{115\%} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{34{,}50\,€ \cdot 15}{115} = \ldots$

21) x = Seitenlänge des Quadrats $x^2 = 40000\,m^2 \quad \rightarrow \quad x = 200$ m

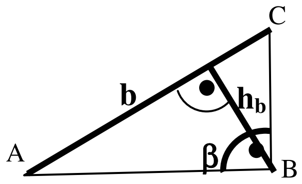
22) alte Seitenlänge = x → alter Flächeninhalt = x^2 ;

neue Seitenlänge = $x - 0{,}8x = 0{,}2x$ → neuer Flächeninhalt = $(0{,}2x)^2 = 0{,}04\,x^2$

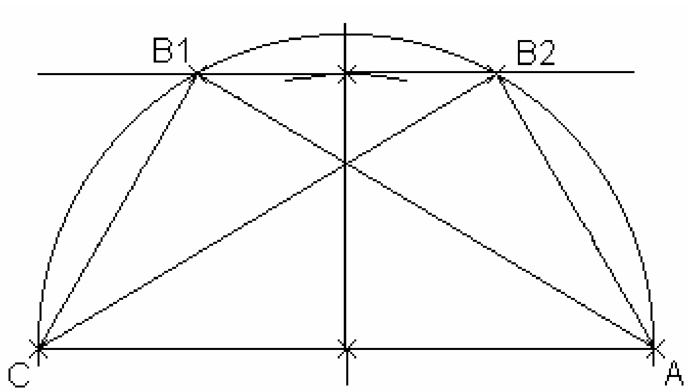
absolute Änderung des Flächeninhalts : $x^2 - 0{,}04x^2 = 0{,}96x^2$; relative Änderung = $\dfrac{0{,}96x^2}{x^2} = 0{,}96 = 96\,\%$

→ Der Flächeninhalt nimmt um 96% ab

23) Planfigur :



Konstruktion:

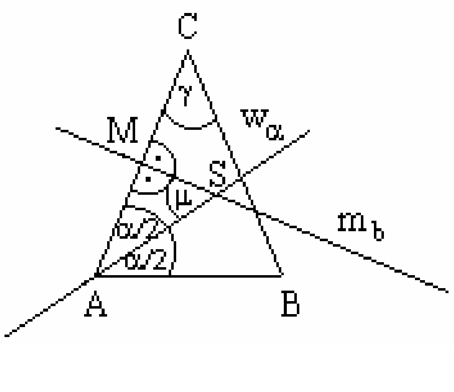


Konstruktionsplan:

1. C und A sind gegeben durch b = 8 cm.
2. B liegt
   a) auf dem Thaleskreis über [CA].
   b) auf der Parallelen zu CA im Abstand h_b = 3,5cm.

Es existieren zwei kongruente Dreiecke AB_1C und AB_2C mit a_1 = 4,1 cm und a_2 = 6,9 cm.

24) Skizze:



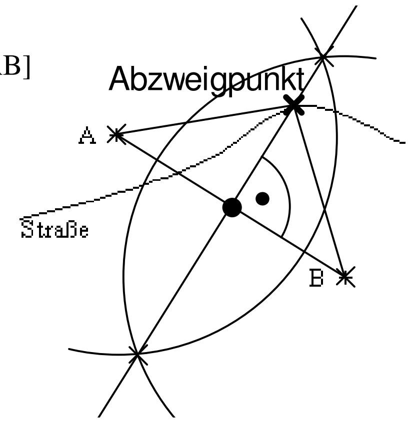
$\alpha = (180° - \gamma) : 2 = 64°$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

$\Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 32°$

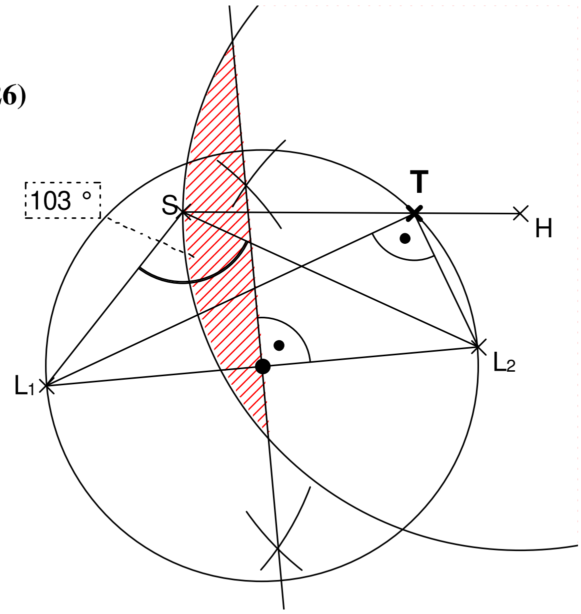
$\mu = 180° - \left(\dfrac{\alpha}{2} + 90°\right) = 58°$ (Winkelsumme in Dreieck ASM)

Der spitze Winkel zwischen w_α und m_b beträgt 58°.

25) Gesucht sind alle Punkte auf der Straße, deren Entfernungen zu A und zu B gleich groß sind $\rightarrow$ Mittelsenkrechte der Strecke [AB]



26)



a) Boot näher an H als s $\rightarrow$

$\rightarrow$ Boot im Kreisinneren des Kreises um H durch S

Boot weiter von L_2 entfernt als von $L_1 \rightarrow$

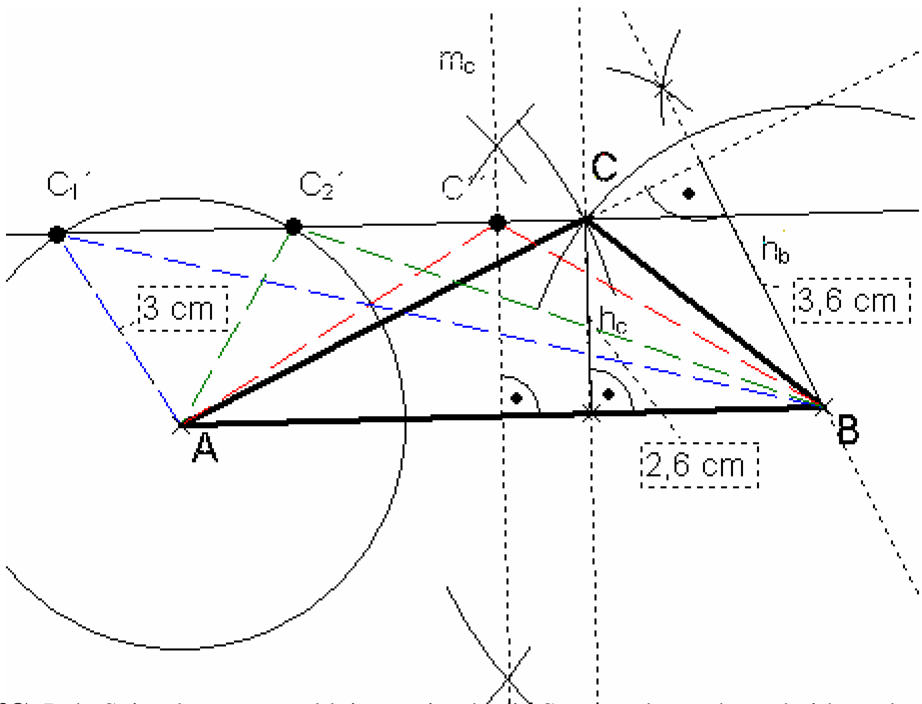
$\rightarrow$ Boot auf der „L_1 – Seite" der Mittelsenkrechten der Strecke [L_1L_2] *(die Punkte auf der Mittelsenkrechten haben die gleiche Entfernung zu L_1 und L_2)*

b) 103° (siehe Zeichnung)

c) T liegt I) auf dem Thaleskreis über [L_1L_2]

II) auf [SH]

27) a)



b) $h_b \approx 3{,}6$ cm

$h_c \approx 2{,}6$ cm

$A = 0{,}5\ c \cdot h_c \approx$

$\approx 0{,}5 \cdot 8{,}5\text{ cm} \cdot 2{,}6\text{ cm} =$

$= 11{,}05\text{ cm}^2 \approx 11\text{cm}^2$

c) und d) :

Die neuen Eckpunkte C`und C`` liegen auf der Parallelen zu AB durch C

c) genau 1 Lösung für $b´ = h_c$

28) Jede Seitenlänge muss kleiner sein als die Summe der anderen beiden, also : $c < a + b = 8{,}1$cm

und $4{,}9\text{cm} < c + 3{,}2\text{cm} \rightarrow c > 1{,}7$cm

möglich also nur c = 2cm und c = 6,7cm

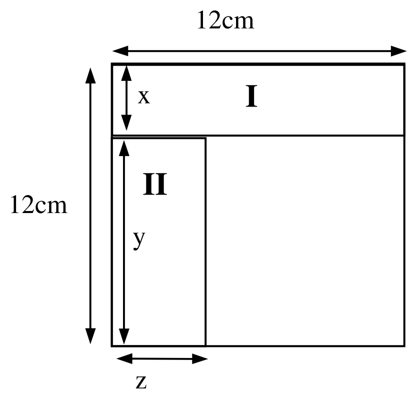
29)a) $A_I = (12\text{cm})^2 : 4 = 144\text{cm}^2 : 4 = 36\text{cm}^2$

b) in I : $x = 36\text{cm}^2 : 12\text{cm} = 3\text{cm}$

$\rightarrow y = 12\text{cm} - 3\text{cm} = 9$ cm

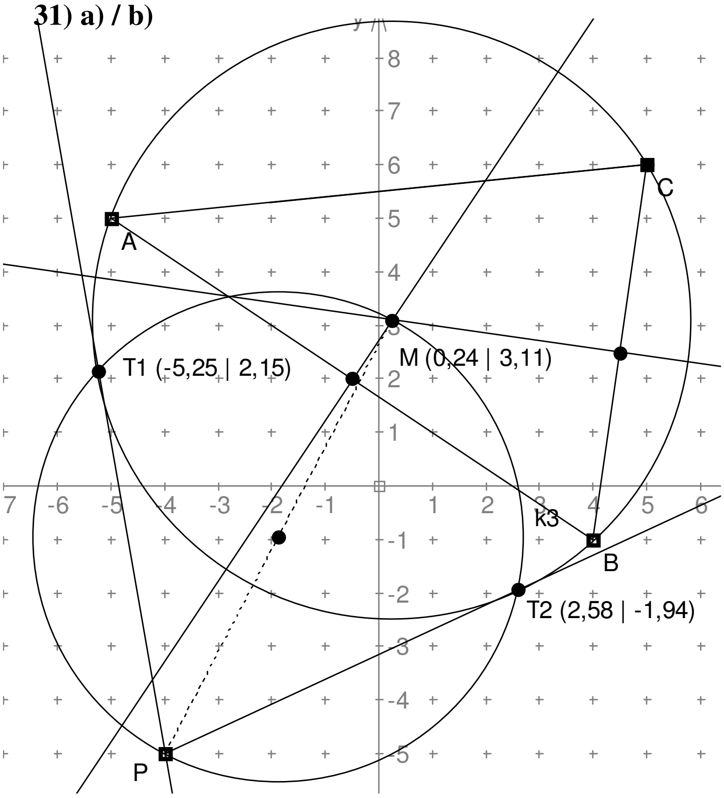
$\rightarrow$ (in II) $z = 36\text{cm}^2 : 9\text{cm} = 4\text{cm}$

$\rightarrow U_{II} = 2 \cdot (9\text{cm} + 4\text{cm}) = 26$ cm

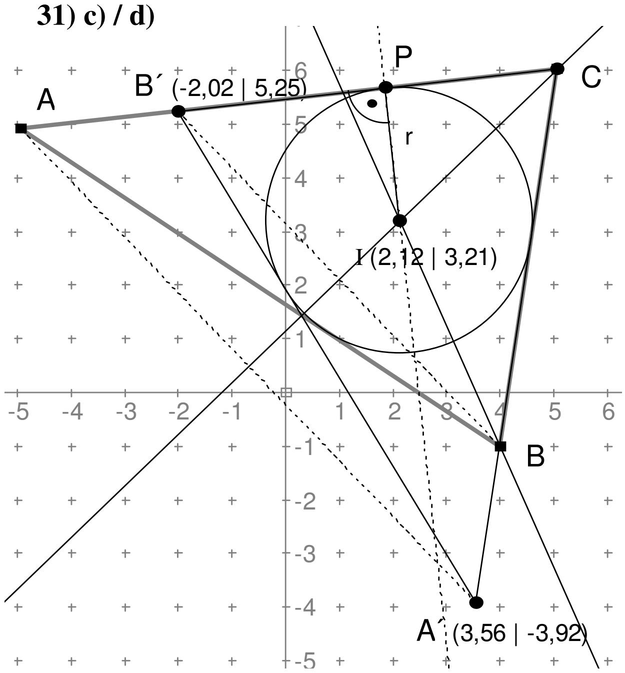


30) a) ein Rechteck b) eine Raute c) ein Quadrat

31) a) / b)



31) c) / d)



Anmerkung : Konstruktionslinien hier z.T. nicht sichtbar

a) M = Schnittpunkt von 2 Mittelsenkrechten

b) T1 und T2 liegen auf dem Thaleskreis über [PM]

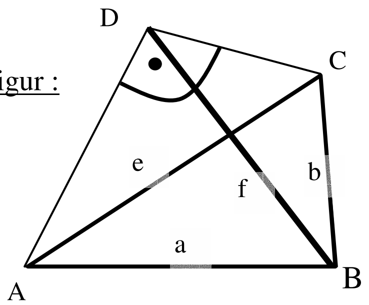
c) Es genügt, den Spiegelpunkt von A´ zu konstruieren, weil sich AB und A´B´ auf der Spiegelachse schneiden und B´ auf AC liegt. d) I ist Schnittpunkt von 2 Winkelhalbierenden ; Berührpunkt = Lotfußpunkt

32) a) Umkreismittelpunkt U auf einer Seite → U ist der Mittelpunkt dieser Seite → Umkreis ist Thaleskreis über dieser Seite → Dreieck ist rechtwinklig

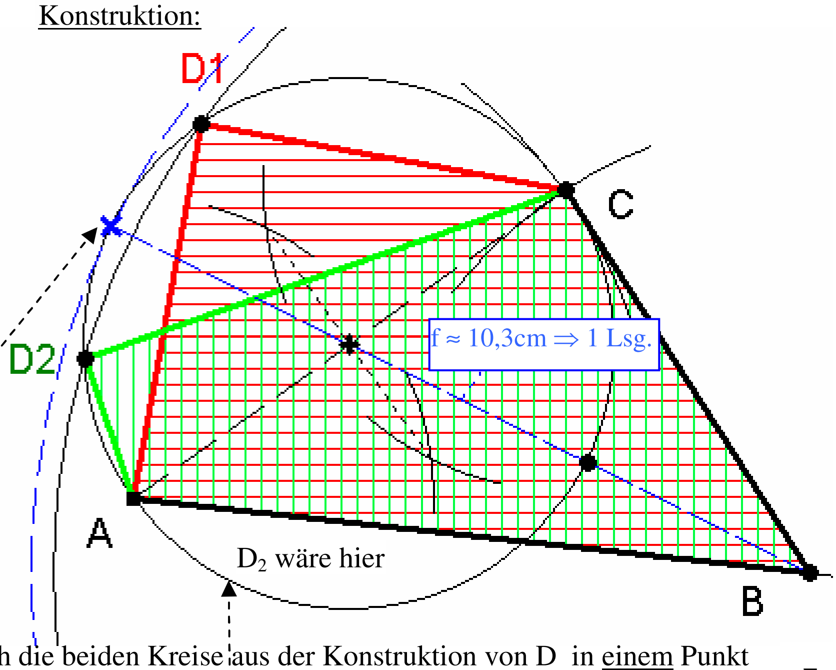
b) Winkelhalbierende = Höhe → Dreieck ist achsensymmetrisch ⇔ Dreieck ist gleichschenklig

33) a)

<u>Planfigur :</u>



<u>Konstruktion:</u>



<u>Konstruktionsplan</u> :
(war nicht verlangt; ist aber nützlich):

1) Konstruiere ΔABC aus a,b und e (nach sss)

2) D liegt
   a) auf dem Thaleskreis über [AC]
   b) auf k(B; r = f = 10 cm)
   (2 Lösungen!)

33) b) I) Für <u>f ≈ 10,3 cm</u> <u>berühren</u> sich die beiden Kreise aus der Konstruktion von D in <u>einem</u> Punkt (vgl. Zeichnung) ⇒ genau 1 Lösung !

II) Für f ≤ 9 cm (=a) ist der <u>untere</u> Schnittpunkt D_2 der beiden Kreise <u>nicht brauchbar</u> (Umlaufsinn der Eckpunkte wäre falsch); bzw. D_2 fällt mit A zusammen → kein Viereck !
Damit gibt es zunächst nur die andere Lösung mit D_1
Für f ≤ 6 cm (= b) ist auch der obere Schnittpunkt D_1 nicht brauchbar (der 90^0-Winkel wäre dann auf der „falschen Seite“ → δ wäre 270^0)

⇒ insgesamt genau 1 Lösung für <u>6cm < f ≤ 9cm</u> nach II) und für f ≈10,3cm nach I)

34) a) ein <u>Drachenviereck</u> b) <u>α = 60⁰</u> (Δ ABD ist dann gleichseitig)
c) eine <u>Raute</u> (alle Seiten sind dann gleich lang)