Gymnasium Stein	**Lösungen** zu den Wiederholungsaufgaben zum Grundwissenkatalog Mathematik der **8. Jahrgangsstufe**

1a) $\frac{10x^3-35x^2}{105x-30x^2}=\frac{5x^2(2x-7)}{-15x(2x-7)}=-\frac{x}{3}$ 1b) geht nicht!   c) $2x+\frac{4}{x}=\frac{2x^2+4}{x}$ d) $2x:\frac{4}{x}=\frac{x^2}{2}$

e) $\frac{2x}{9x+3}-\frac{2x-1}{6x+2}=\frac{2x}{3(3x+1)}-\frac{2x-1}{2(3x+1)}=\frac{2\cdot 2x}{2\cdot 3(3x+1)}-\frac{3\cdot(2x-1)}{3\cdot 2(3x+1)}=\frac{4x-6x+3}{6(3x+1)}=\frac{-2x+3}{6(3x+1)}$

f) $\frac{a-3}{a^2-3a}\cdot\frac{2a}{a+3}=\frac{(a-3)2a}{a(a-3)\cdot(a+3)}=\frac{2}{a+3}$ h) $1-\frac{x-3}{x+2}:\frac{3-x}{x+2}=1-\frac{-(3-x)\cdot(x+2)}{(x+2)(3-x)}=1-(-1)=2$

g) $\frac{x-2}{x-x^2}+\frac{2+x}{x}=\frac{x-2}{x(1-x)}+\frac{(2+x)(1-x)}{x(1-x)}=\frac{x-2+2-x-x^2}{x(1-x)}=\frac{-x^2}{x(1-x)}=\frac{-x}{1-x}=\frac{x}{x-1}$

i) $x^{-7}:x^{-4}+4\cdot x^{-3}\cdot x^3-\frac{1}{x^3}=x^{-3}+4\cdot 1-x^{-3}=4$; j) $(x+3)^{-2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{x+3}{(x+3)^2}=\frac{-x-2}{(x+3)^2}$

2a) $\frac{3}{b-2}-\frac{1}{b}+1=\frac{3b}{b(b-2)}-\frac{b-2}{b(b-2)}+\frac{b(b-2)}{b(b-2)}=\frac{3b-(b-2)+b^2-2b}{b(b-2)}=\frac{2+b^2}{b(b-2)}$

b) $T(-3)=\frac{2+9}{-3(-3-2)}=\frac{11}{15}$

3) a) $\frac{x}{9}=x \mid \cdot 9 \Rightarrow x=9x \Leftrightarrow 8x=0$; $L=\{0\}$; $D=\mathbb{Q}$ b) $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$; $9=x^2$; $L=\{-3; 3\}$

c) $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$; $L=\{\}$ *(Zähler immer $\neq 0$)*   d) $D=\mathbb{Q}\setminus\{9\}$; $L=\{-1\}$

e) $\frac{x+1}{x-9}=2 \mid \cdot(x-9) \Rightarrow x+1=2x-18 \Rightarrow x=19$; $L=\{19\}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{9\}$;

f) $\frac{x-3}{2}=x \mid \cdot 2 \Rightarrow x-3=2x$; $x=-3$; $L=\{-3\}$; $D=\mathbb{Q}$

g) $(x^2-6x)\cdot(4x+8)=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-6)\cdot 4\cdot(x+2)=0$; $L=\{0; 6; -2\}$; $D=\mathbb{Q}$

h) $\frac{6}{x}+\frac{3}{5}=3 \mid \cdot 5x \Rightarrow 30+3x=15x \Leftrightarrow 12x=30$; $L=\{2{,}5\}$; $D=Q\setminus\{0\}$;

i) $\frac{3}{2x}-\frac{7}{3}=\frac{1{,}5}{x} \Leftrightarrow \frac{3}{2x}-\frac{7}{3}=\frac{3}{2x} \Leftrightarrow \frac{7}{3}=0$;   Widerspruch! $\to L=\{\ \}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$;

k) $\frac{2-x}{3+x}=\frac{3-x}{x}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;-3\}$; „über Kreuz multiplizieren“ $\Rightarrow 2x-x^2=9-x^2 \Leftrightarrow 2x=9$; $L=\{4{,}5\}$

l) $\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x} \mid \cdot x^2\cdot(x+1)$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;-1\}$;

$2(x+1)+x^2=x(x+1)$

$2x+2+x^2=x^2+x \mid -x^2-x-2$

$x=-2$; $L=\{-2\}$

m) $\frac{3x}{2x-6}-\frac{3}{2}=\frac{4{,}5}{x-3} \Leftrightarrow \frac{3x}{2(x-3)}-\frac{3}{2}=\frac{4{,}5}{x-3} \mid \cdot 2(x-3)$

$3x-3(x-3)=9 \Rightarrow 9=9 \Rightarrow L=D=\mathbb{Q}\setminus\{3\}$

n) $\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2-2x}=\frac{3}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{6}{x(x-2)}=\frac{3}{x-2} \mid \cdot x(x-2)$

$D=\mathbb{Q}\setminus\{0; 2\}$

$x-2+6=3x \Leftrightarrow 4=2x \Leftrightarrow x=2\notin D \Rightarrow L=\{\ \}$

o) $\frac{3}{x^2-3x}=\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{3}{x(x-3)}=\frac{2}{x}$;

$D=\mathbb{Q}\setminus\{0; 3\}$;

I) über Kreuz mult. $\Rightarrow 3x=2x^2-6x$

$\Leftrightarrow 2x^2-9x=0 \Leftrightarrow x(2x-9)=0$

$x_1=0\notin D!$; $x_2=4{,}5 \to L=\{4{,}5\}$

II) Multiplizieren mit HN $= x(x-3)$

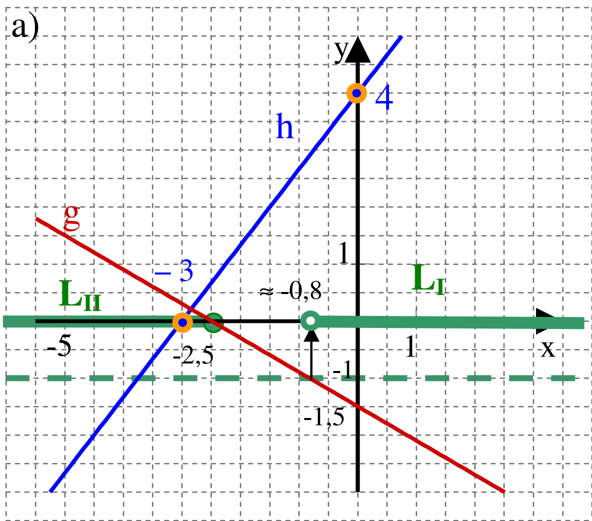
$\Rightarrow 3=2\cdot(x-3) \Leftrightarrow 2x=9 \Leftrightarrow x=4{,}5$; $L=\{4{,}5\}$

Hier einfacher, da die Nenner den gemeinsamen Faktor x haben!

4a) $P = \frac{U^2}{R}; U' = 3U \Rightarrow P' = \frac{(3\cdot U)^2}{R} = \frac{9\cdot U^2}{R} = 9\cdot P$ 4b) $P = \frac{U^2}{R}; R' = 3R \Rightarrow P' = \frac{U^2}{3\cdot R} = \frac{1}{3}\cdot P$

5) $a = \frac{f+k}{fb}$; $afb = f + k$ $\Rightarrow$
- $b = \frac{f+k}{af}$
- $k = afb - f = f(ab-1) \Rightarrow f = \frac{k}{ab-1}$

6) b)(implizite Darstellung) und f) beschreiben die Gerade g, i) beschreibt die Gerade h (y = 4)



7) a) Berechne für h z.B. die Achsenschnittpunkte :

S_x : y = 0 → – 4x – 12 = 0 → x = – 3

S_y : x = 0 → 3y – 12 = 0 → y = 4

b) I) – 0,6x – 1,5 < – 1 | +0,6x +1

– 0,5 < 0,6x | : 0,6

$-\frac{5}{6} < x \rightarrow L_I =]-\frac{5}{6}; \infty[$ $\qquad -0{,}8 \approx -\frac{5}{6}$

nach Zeichnung hier nur ungenau: L_I =] – 0,8 ; ∞[

II) – 0,6x – 1,5 ≥ 0 | +0,6x

– 1,5 ≥ 0,6x | : 0,6

–2,5 ≥ x → L_{II} =] – ∞ ;– 2,5]

8a) g : y = 3x + 2 ; b) h : y = – 0,5x ; c) f : y = 0

9) $m = \frac{160m}{2000m} = 0{,}08 = 8\%$ 10) a) y = – 3x – 2 b) y = – 3x + 2 c) y = 3x + 2

11) a) $m = \frac{15-(-25)}{-3-7} = \frac{40}{-10} = -4$ → y = – 4x + t ; Q ∈ h → 15 = – 4 · (–3) + t → t = 15 – 12 = 3

also y = – 4x + 3 ; S_x : y = 0 → x = 0,75; $S_x(0{,}75|0)$; S_y : (0|3)

b) R ∈ g ? – 4 · 100+ 3 = –397 ; y_R = – 399 < – 397 → R liegt unterhalb von g

S ∈ g ? – 4 · (– 12,5) + 3 = 50+3 = 53 = y_S → S ∈ g

12)a) $h: y = -\frac{2}{3}x + 6$; (oder Schnittpunkte mit den Achsen)

b) I) 3y +2x –18 = 0

II) y = 2x–1

y aus II) in I): 3 (2x–1) + 2x – 18 = 0

⇒ x = 2,625 ;

in II) y = 4,25 → S(2,625 | 4,25)

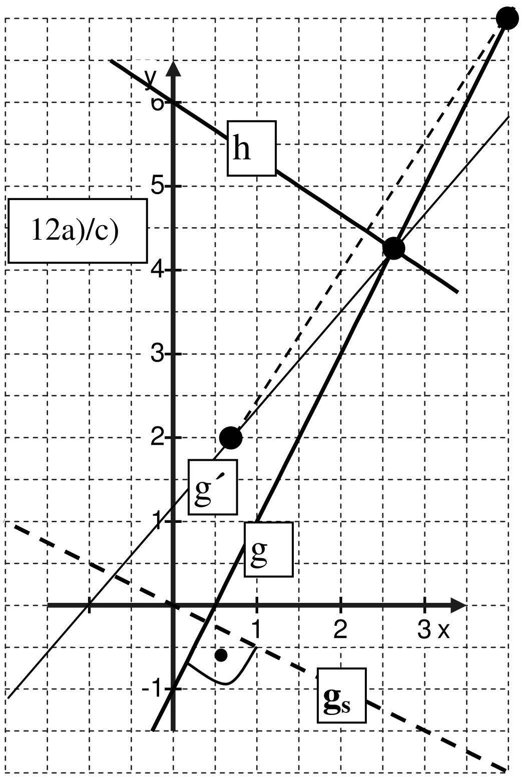
c) Spiegle einen Punkt von g an h (vgl. Zeichnung) ;

g´ geht außerdem durch den Schnittpunkt von g und h

d) Die gesuchte Gerade g_s muss senkrecht zu g sein,

wenn sie sich durch Spiegelung an g nicht ändern soll !

Zeichnung ⇒ g_s : $y = -\frac{1}{2}x$



13) $\frac{y}{5cm} = \frac{3cm}{7cm-3cm}$ *(1. Strahlensatz, X-Figur)*

$\Rightarrow y = \frac{3cm}{4cm}\cdot 5cm = 3{,}75cm$;

$\frac{x}{5cm+4cm} = \frac{4cm}{5cm}$ *(2. Strahlensatz, V-Figur)* => x = 7,2cm;

14) $\frac{x}{\overline{BC}} = \frac{x+\overline{BD}}{\overline{DE}}$ (2. Strahlensatz, V-Figur) $\Leftrightarrow$ $\frac{x}{10m} = \frac{x+12m}{25m}$ | $\cdot$ *50m* $\Leftrightarrow$ $5x = 2x + 24$ m $\Leftrightarrow$ $x = 8m$

15) x = Preis für einen Hamburger in € ; y = Preis für eine Portion Pommes in €

I) $5x + 7y + 5 \cdot 0{,}8 = 18{,}20 \quad \rightarrow x = (14{,}20 - 7y) : 5 = 2{,}84 - 1{,}4y$ (I´)

II) $7x + 6y + 8 \cdot 0{,}8 = 22{,}10$

x in II) : $7 \cdot (2{,}84 - 1{,}4y) + 6y + 6{,}4 = 22{,}10$

$19{,}88 - 9{,}8y + 6y + 6{,}4 = 22{,}10$

$-3{,}8y = -4{,}18$ (I´)

$y = -4{,}18 : (-3{,}8) = 1{,}1 \quad \Rightarrow x = 2{,}84 - 1{,}4 \cdot 1{,}1 = 1{,}3$

A. : Ein Hamburger kostet 1,30€, für eine Portion Pommes muss man 1,10€ bezahlen

16) a) $y = -\frac{1}{3}x + 3$ b) $y = \frac{x-2}{x+1}$ c) $y = \frac{3}{x}$ d) $y = 1{,}5x + 2{,}5$ f) $y = -4{,}5$

e) $y = -2x + t$ und $P(5|0) \in$ Gerade $\Rightarrow 0 = -2 \cdot 5 + t \Rightarrow t = 10 \Rightarrow y = -2x + 10$

17) a) S_x: $y = 0 \Rightarrow 6 + 3x = 0 \Rightarrow x = -2$; also $S_x(-2|0)$;

S_y: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{6+0}{0-3} = 2$; also $S_y(0|-2)$

b) Definitionslücke bei $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$; also :

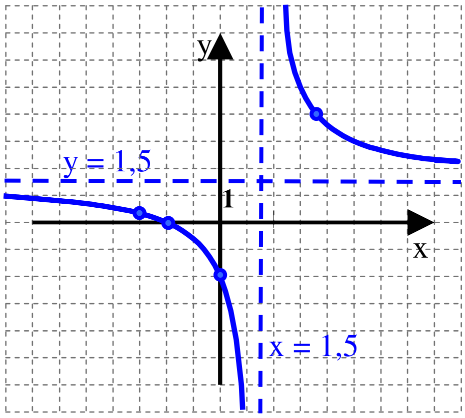
senkrechte Asymptote : $x = 1{,}5$

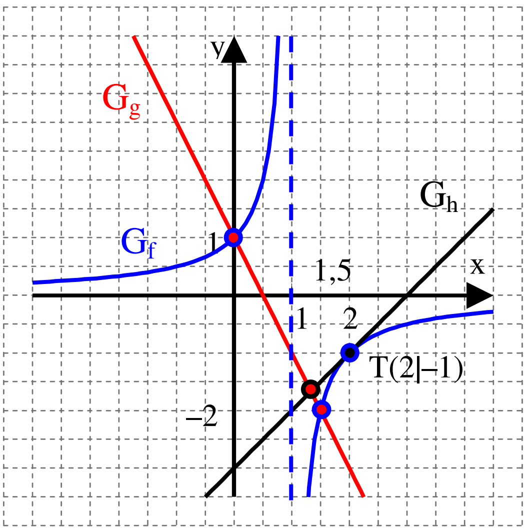
$h(1000) = 1{,}5052\ldots \approx 1{,}5$; $h(-1000) = 1{,}494\ldots \approx 1{,}5$

$\rightarrow$ waagrechte As. : $y = 1{,}5$

c) $h(-3) = \frac{6+3\cdot(-3)}{2\cdot(-3)-3} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$;

$\frac{6+3x}{2x-3} = 4 \Rightarrow 6 + 3x = 8x - 12 \Leftrightarrow 5x = 18 \Leftrightarrow x = 3{,}6$





18) a) $g(x) = h(x) \Leftrightarrow -2x + 1 = x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$y = h(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3} - 3 = -1\frac{2}{3}$; also $S(1\frac{1}{3} \mid -1\frac{2}{3})$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x + 1 = \frac{1}{1-x}$ | $\cdot (1-x)$

$\rightarrow \ldots\rightarrow \quad 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x-3) = 0 \rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1{,}5$

$y_1 = g(x_1) = 1$; $y_2 = g(x_2) = -2$; also $S_1(0|1)$; $S_2(1{,}5|-2)$

c) Lösungen = x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte von G_f und G_h ; Zeichnung $\rightarrow$ 1 gemeinsamer Punkt: $T(2|-1)$

Lösung also $x = 2$;

Probe : $f(2) = \frac{1}{1-2} = -1$ und $h(2) = 2 - 3 = -1$ ✓

19) $\frac{4+1+5+x}{3+x} = 2 \Rightarrow 10 + x = 2(3+x) \Rightarrow x = 4$ Martina braucht noch mindestens vier Einser.

20) *Lösungsbeispiel mit zwei Variablen:* Sei x das Alter von Werner, y das Alter von Gudrun.

I: $x + y = 83$ II: $(x - 4) = 1{,}5(y - 4)$ bzw. II’: $x - 1{,}5y = 4 - 6$

$\Rightarrow$ I – II’ : $y + 1{,}5y = 83 - (-2) \quad \Rightarrow 2{,}5y = 85 \quad \Rightarrow y = 34$

Lösungsbeispiel mit einer Variablen: Sei x das damalige Alter von Gudrun.

Damals war Werner 1,5x Jahre alt. Heute ist Gudrun x + 4 Jahre alt, Werner 1,5x + 4 Jahre alt.

$(x + 4) + (1{,}5x + 4) = 83 \Rightarrow 2{,}5x = 83 - 8 \Rightarrow x = 30.$

Damals war Gudrun 30, Werner 45. Heute sind sie 34 bzw. 49 Jahre alt.

Es gibt zahlreiche andere Ansätze, die auch zum Ziel führen, je nachdem, welches Alter mit x bzw. y abgekürzt wird.

21) $19-2x+14<15-3x+12 \;\Rightarrow\; 33-2x<27-3x \;\Rightarrow\; x<-6 \;\Rightarrow\; L=\{x \mid x<-6\} =]-\infty;-6[$

22)a) II) $\Rightarrow$ $x = 3y-4$ (I´)

x in I´: $-3(3y-4)+5y+20 = 0$

$-9y+12+5y+20 = 0$

$-4y = -32$

$y = 8$; y in (I´) $\Rightarrow x = 20$; $\rightarrow L = \{(20 \mid 8)\}$

b) I $\Leftrightarrow$ $0{,}5x+6y = 10$

II $\Leftrightarrow$ $0{,}5x+6y = 11$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer.

Geometrische Bedeutung: Die Gleichungen I und II beschreiben zwei echt parallele Geraden

23) a) $-5 \cdot$ I) : $-35x + 15y - 5a = 0$

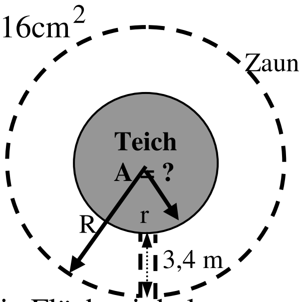
II) $bx + 15y + 6 = 0$ Vergleich von I) und II) $\rightarrow b = -35$ und $-5a = 6 \Leftrightarrow a = -1{,}2$

b) I) – II) : Lösung (0|0) heißt $x = y = 0$;

Einsetzen $\rightarrow c = 0$ und $e = 0$; d kann jeden beliebigen Wert haben

24) Umfang: $U = \frac{1}{2}\cdot 6\text{cm}\cdot\pi + \frac{1}{2}\cdot 2\text{cm}\cdot\pi + 4{,}0\text{cm} + \frac{1}{4}\cdot 8\text{cm}\cdot\pi = 6\text{cm}\cdot\pi + 4\text{cm} \approx 22{,}8\text{cm}$

Flächeninh.: $A = \frac{1}{2}\cdot(3\text{cm})^2\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot(1\text{cm})^2\cdot\pi + 4{,}0\text{cm}\cdot 4{,}0\text{cm} - \frac{1}{4}\cdot(4\text{cm})^2\cdot\pi = 16\text{cm}^2$



25) $U = 2\cdot R\pi \;\rightarrow\; R = U:(2\pi) = 94{,}6\text{m}:(2\pi) = 15{,}05\ldots\text{m}$

$r = R - 3{,}4\text{ m} = 15{,}05\ldots\text{m} - 3{,}4\text{ m} = 11{,}65\ldots\text{m}$

$A = r^2\pi = (11{,}65\ldots\text{m})^2\cdot\pi = 426{,}8\ldots\text{m}^2 \approx 430\text{ m}^2$

26) $A(D_1) = 0{,}5\cdot g_1\cdot h_1 = 0{,}5\cdot 5\text{cm}\cdot 4\text{cm} = 10\text{cm}^2$

Wenn k der (gesuchte) Abbildungsmaßstab für die Strecken ist, dann gilt für die Flächeninhalte :

$k^2 = A(D_2):A(D_1) = 90\text{cm}^2 : 10\text{cm}^2 = 9 \;\Rightarrow\; k = 3 \quad (k>0)$

$\Rightarrow g_2 = k\cdot g_1 = 3\cdot 5\text{cm} = 15\text{cm}$ und $h_2 = k\cdot h_1 = 3\cdot 4\text{cm} = 12\text{cm}$

27) a) Wegen $m \sim V$ berechnet man zuerst die Volumina: $V_1 = (2\text{cm})^3 = 8\text{cm}^3$; $V_2 = (3\text{cm})^3 = 27\text{cm}^3$

8cm^3 wiegen 154 g $\rightarrow$ 1cm^3 wiegt $\frac{154\text{g}}{8}$ $\rightarrow$ 27cm^3 wiegen $\frac{154\text{g}\cdot 27}{8} = 519{,}75\text{ g} \approx \underline{\underline{520\text{ g}}}$

b) Hier gilt $m \sim A$ $\Rightarrow$ Wegen $0{,}9\text{ g} = \frac{1}{9}\cdot 8{,}1\text{ g}$ gilt auch $A´ = \frac{1}{9}\cdot A$

Daraus folgt wegen $A \sim r^2$: $r´ = \frac{1}{3}\cdot r = 7{,}2\text{ cm} : 3 = 2{,}4\text{ cm}$

28) a) $P(\{G\}) = \frac{1}{9}$ b) $P(\{E\}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ c) $P(\{I\}) = \frac{2}{9}$ d) P („Konsonant“) $= \frac{4}{9}$

29) a) $P(A) = \frac{1\cdot1\cdot1\cdot1}{6\cdot6\cdot6\cdot6} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296} \approx 7{,}7\cdot10^{-4} = 7{,}7\cdot10^{-4}\cdot10^2\,\% = 7{,}7\cdot10^{-2}\,\% = 0{,}077\%$;

b) $P(B) = \frac{6\cdot1}{6\cdot6} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$; c) $P(A) = \frac{6\cdot5\cdot4}{6\cdot6\cdot6} = \frac{5}{9} \approx 55{,}6\%$;

Hier Anwendungen des Zählprinzips, z.B:

bei b) Der erste der beiden hat 6 Möglichkeiten für seine Note, weil der andere dann aber dieselbe Note haben soll, hat er nur noch 1 Möglichkeit

bei c) bei verschiedenen Noten hat der erste 6 Möglichkeiten, der zweite 5 Mögl. und der dritte 4 Mögl.

30) $\frac{1^8}{4^8} = \frac{1}{65536} \approx 1{,}5\cdot10^{-5} = 0{,}0015\,\%$ b) $\frac{3^8}{4^8} = \frac{6561}{65536} \approx 10\%$ c) $\frac{1^3\cdot3^5}{4^8} = \frac{243}{65536} \approx 0{,}37\%$