Gymnasium Stein	**Lösungen** zu den Wiederholungsaufgaben zum Grundwissenkatalog Mathematik der **8. Jahrgangsstufe**

1a) $\frac{10x^3-35x^2}{105x-30x^2}=\frac{5x^2(2x-7)}{-15x(2x-7)}=-\frac{x}{3}$ 1b) geht nicht! c) $2x+\frac{4}{x}=\frac{2x^2+4}{x}$ d) $2x:\frac{4}{x}=\frac{x^2}{2}$

e) $\frac{2x}{9x+3}-\frac{2x-1}{6x+2}=\frac{2x}{3(3x+1)}-\frac{2x-1}{2(3x+1)}=\frac{2\cdot 2x}{2\cdot 3(3x+1)}-\frac{3\cdot(2x-1)}{3\cdot 2(3x+1)}=\frac{4x-6x+3}{6(3x+1)}=\frac{-2x+3}{6(3x+1)}$

f) $\frac{a-3}{a^2-3a}\cdot\frac{2a}{a+3}=\frac{(a-3)2a}{a(a-3)\cdot(a+3)}=\frac{2}{a+3}$ h) $1-\frac{x-3}{x+2}:\frac{3-x}{x+2}=1-\frac{-(3-x)\cdot(x+2)}{(x+2)(3-x)}=1-(-1)=2$

g) $\frac{x-2}{x-x^2}+\frac{2+x}{x}=\frac{x-2}{x(1-x)}+\frac{(2+x)(1-x)}{x(1-x)}=\frac{x-2+2-x-x^2}{x(1-x)}=\frac{-x^2}{x(1-x)}=\frac{-x}{1-x}=\frac{x}{x-1}$

i) $x^{-7}:x^{-4}+4\cdot x^{-3}\cdot x^3-\frac{1}{x^3}=x^{-3}+4\cdot 1-x^{-3}=4$; j) $(x+3)^{-2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{x+3}{(x+3)^2}=\frac{-x-2}{(x+3)^2}$

2a) $\frac{3}{b-2}-\frac{1}{b}+1=\frac{3b}{b(b-2)}-\frac{b-2}{b(b-2)}+\frac{b(b-2)}{b(b-2)}=\frac{3b-(b-2)+b^2-2b}{b(b-2)}=\frac{2+b^2}{b(b-2)}$

b) $T(-3)=\frac{2+9}{-3(-3-2)}=\frac{11}{15}$

3) a) $\frac{x}{9}=x\ |\cdot 9\ \Rightarrow\ x=9x\ \Leftrightarrow\ 8x=0$; $L=\{0\}$; $D=\mathbb{Q}$ b) $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$; $9=x^2$; $L=\{-3;3\}$

c) $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$; $L=\{\}$ *(Zähler immer ≠0)* d) $D=\mathbb{Q}\setminus\{9\}$; $L=\{-1\}$

e) $\frac{x+1}{x-9}=2\ |\cdot(x-9)\ \Rightarrow\ x+1=2x-18\ \Rightarrow x=19$; $L=\{19\}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{9\}$;

f) $\frac{x-3}{2}=x\ |\cdot 2\ \Rightarrow x-3=2x$; $x=-3$; $L=\{-3\}$; $D=\mathbb{Q}$

g) $(x^2-6x)\cdot(4x+8)=0\ \Leftrightarrow\ x\cdot(x-6)\cdot 4\cdot(x+2)=0$; $L=\{0;6;-2\}$; $D=\mathbb{Q}$

h) $\frac{6}{x}+\frac{3}{5}=3\ |\cdot 5x\ \Rightarrow\ 30+3x=15x\Leftrightarrow\ 12x=30$; $L=\{2{,}5\}$; $D=Q\setminus\{0\}$;

i) $\frac{3}{2x}-\frac{7}{3}=\frac{1{,}5}{x}\Leftrightarrow\frac{3}{2x}-\frac{7}{3}=\frac{3}{2x}\Leftrightarrow\frac{7}{3}=0$; Widerspruch! $\to L=\{\ \}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$;

k) $\frac{2-x}{3+x}=\frac{3-x}{x}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;-3\}$; „über Kreuz multiplizieren" $\Rightarrow 2x-x^2=9-x^2\ \Leftrightarrow 2x=9$; $L=\{4{,}5\}$

l) $\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}\ |\cdot x^2\cdot(x+1)$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;-1\}$;

$2(x+1)+x^2=x(x+1)$
$2x+2+x^2=x^2+x\ \ |-x^2-x-2$
$x=-2$; $L=\{-2\}$

m) $\frac{3x}{2x-6}-\frac{3}{2}=\frac{4{,}5}{x-3}\Leftrightarrow\frac{3x}{2(x-3)}-\frac{3}{2}=\frac{4{,}5}{x-3}\ |\cdot 2(x-3)\Rightarrow\ 3x-3(x-3)=9\Rightarrow\ 9=9\Rightarrow L=D=\mathbb{Q}\setminus\{3\}$

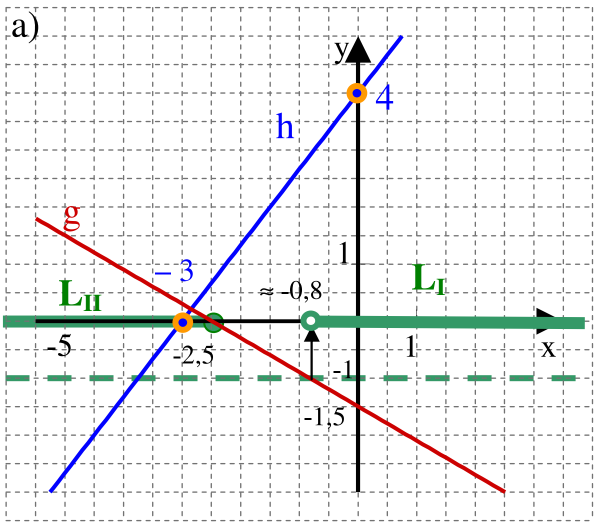
n) $\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2-2x}=\frac{3}{x-2}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x}+\frac{6}{x(x-2)}=\frac{3}{x-2}\ |\cdot x(x-2)$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;2\}$

$\Leftrightarrow\ x-2+6=3x\ \Leftrightarrow\ 4=2x\Leftrightarrow\ x=2\notin D\ \Rightarrow\ L=\{\ \}$

4a) $P = \frac{U^2}{R}; U' = 3U \;\Rightarrow\; P' = \frac{(3\cdot U)^2}{R} = \frac{9\cdot U^2}{R} = 9\cdot P$ 4b) $P = \frac{U^2}{R}; R' = 3R \;\Rightarrow\; P' = \frac{U^2}{3\cdot R} = \frac{1}{3}\cdot P$

5) $a = \frac{f+k}{fb}$; $afb = f + k$ $\Rightarrow$
- $b = \frac{f+k}{af}$
- $k = afb - f = f(ab-1) \;\Rightarrow\; f = \frac{k}{ab-1}$

6) b)(implizite Darstellung) und f) beschreiben die Gerade g, i) beschreibt die Gerade h (y = 4)



7) a) Berechne für h z.B. die Achsenschnittpunkte :

S_x : $y = 0 \;\rightarrow\; -4x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = -3$

S_y : $x = 0 \;\rightarrow\; 3y - 12 = 0 \;\rightarrow\; y = 4$

b) I) $-0{,}6x - 1{,}5 < -1 \;|\; +0{,}6x + 1$

$-0{,}5 < 0{,}6x \;|\; : 0{,}6$

$-\frac{5}{6} < x \;\rightarrow\; L_I =]-\frac{5}{6}; \infty[$ $\quad -0{,}8 \approx -\frac{5}{6}$

nach Zeichnung hier nur ungenau: $L_I =]-0{,}8 ; \infty[$

II) $-0{,}6x - 1{,}5 \geq 0 \;|\; +0{,}6x$

$-1{,}5 \geq 0{,}6x \;|\; : 0{,}6$

$-2{,}5 \geq x \;\rightarrow\; L_{II} =]-\infty ; -2{,}5]$

8a) g : y = 3x + 2 ; b) h : y = – 0,5x ; c) f : y = 0

9) $m = \frac{160\text{m}}{2000\text{m}} = 0{,}08 = 8\%$ 10) a) y = – 3x – 2 b) y = – 3x + 2 c) y = 3x + 2

11) a) $m = \frac{15-(-25)}{-3-7} = \frac{40}{-10} = -4 \;\rightarrow\; y = -4x + t$; $Q \in h \;\rightarrow\; 15 = -4\cdot(-3) + t \;\rightarrow\; t = 15 - 12 = 3$

also y = – 4x + 3 ; S_x : y = 0 → x = 0,75; $S_x(0{,}75|0)$; S_y : (0|3)

b) $R \in g$? $-4\cdot 100 + 3 = -397$; $y_R = -399 < -397$ → R liegt unterhalb von g

$S \in g$? $-4\cdot(-12{,}5) + 3 = 50 + 3 = 53 = y_S \;\rightarrow\; S \in g$

12)a) $h: y = -\frac{2}{3}x + 6$; (oder Schnittpunkte mit den Achsen)

b) I) 3y +2x –18 = 0

II) y = 2x–1

y aus II) in I): 3 (2x–1) + 2x – 18 = 0

⇒ x = 2,625 ;

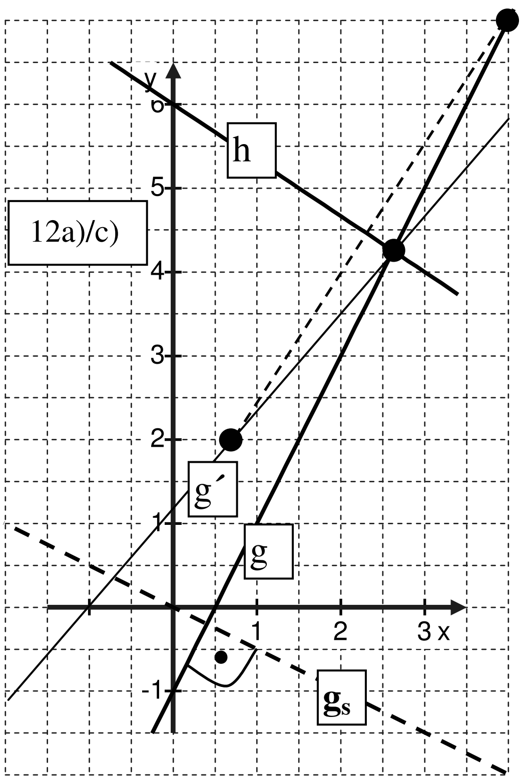
in II) y = 4,25 → S(2,625 | 4,25)

c) Spiegle einen Punkt von g an h (vgl. Zeichnung) ;

g´ geht außerdem durch den Schnittpunkt von g und h

d) Die gesuchte Gerade g_s muss <u>senkrecht</u> zu g sein, wenn sie sich durch Spiegelung an g nicht ändern soll !

Zeichnung ⇒ g_s : $y = -\frac{1}{2}x$



13) $\frac{y}{5\text{cm}} = \frac{3\text{cm}}{7\text{cm}-3\text{cm}}$ *(1. Strahlensatz, X-Figur)*

$\Rightarrow y = \frac{3\text{cm}}{4\text{cm}}\cdot 5\text{cm} = 3{,}75\text{cm};$

$\frac{x}{5\text{cm}+4\text{cm}} = \frac{4\text{cm}}{5\text{cm}}$ *(2. Strahlensatz, V-Figur)* => x = 7,2cm;

14) $\frac{x}{\overline{BC}} = \frac{x+\overline{BD}}{\overline{DE}}$ (2. Strahlensatz, V-Figur) $\Leftrightarrow \frac{x}{10\text{m}} = \frac{x+12\text{m}}{25\text{m}} \mid \cdot\, 50m \Leftrightarrow$ $5x = 2x + 24$ m $\Leftrightarrow$ $x = 8$m

15) x = Preis für einen Hamburger in € ; y = Preis für eine Portion Pommes in €

I) $5x + 7y + 5 \cdot 0{,}8 = 18{,}20 \rightarrow x = (14{,}20 - 7y) : 5 = 2{,}84 - 1{,}4y$ (I´)

II) $7x + 6y + 8 \cdot 0{,}8 = 22{,}10$

x in II) : $7 \cdot (2{,}84 - 1{,}4y) + 6y + 6{,}4 = 22{,}10$

$19{,}88 - 9{,}8y + 6y + 6{,}4 = 22{,}10$

$-3{,}8y = -4{,}18$ (I´)

$y = -4{,}18 : (-3{,}8) = 1{,}1 \Rightarrow x = 2{,}84 - 1{,}4 \cdot 1{,}1 = 1{,}3$

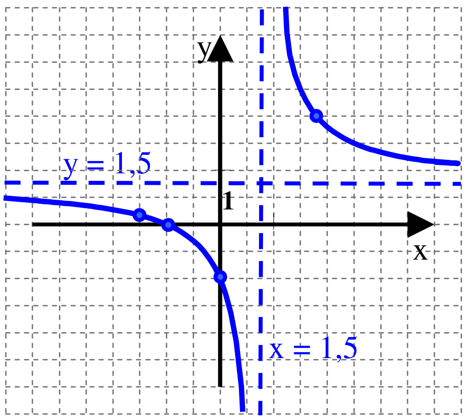
A. : Ein Hamburger kostet 1,30€, für eine Portion Pommes muss man 1,10€ bezahlen

16) a) $y = -\frac{1}{3}x + 3$ b) $y = \frac{x-2}{x+1}$ c) $y = \frac{3}{x}$ d) $y = 1{,}5x + 2{,}5$ f) $y = -4{,}5$

e) $y = -2x + t$ und $P(5|0) \in$ Gerade $\Rightarrow 0 = -2 \cdot 5 + t \Rightarrow t = 10 \Rightarrow y = -2x + 10$

17) a) S_x: $y = 0 \Rightarrow 6 + 3x = 0 \Rightarrow x = -2$; also $S_x (-2| 0)$;

S_y: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{6+0}{0-3} = 2$; also $S_y (0 |-2)$



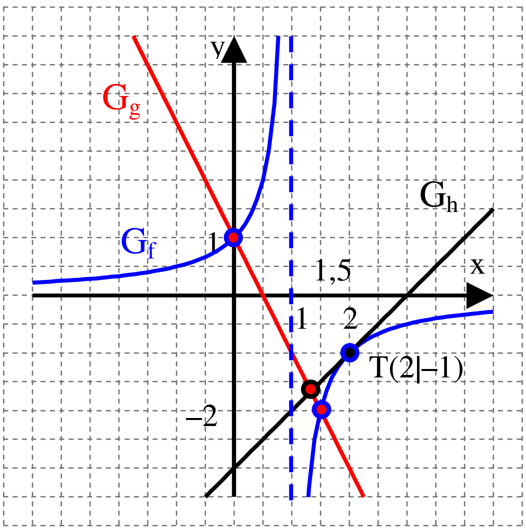
b) Definitionslücke bei $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$; also :
senkrechte Asymptote : $x = 1{,}5$

$h(1000) = 1{,}5052\ldots \approx 1{,}5$; $h(-1000) = 1{,}494\ldots \approx 1{,}5$

$\rightarrow$ waagrechte As. : $y = 1{,}5$

c) $h(-3) = \frac{6+3\cdot(-3)}{2\cdot(-3)-3} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$;

$\frac{6+3x}{2x-3} = 4 \Rightarrow 6 + 3x = 8x - 12 \Leftrightarrow 5x = 18 \Leftrightarrow x = 3{,}6$



18) a) $g(x) = h(x) \Leftrightarrow -2x + 1 = x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$y = h(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3} - 3 = -1\frac{2}{3}$; also $S\,(1\frac{1}{3} \mid -1\frac{2}{3})$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x + 1 = \frac{1}{1-x} \mid \cdot (1-x)$

$\rightarrow \ldots . \rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x-3) = 0 \rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1{,}5$

$y_1 = g(x_1) = 1$; $y_2 = g(x_2) = -2$; also $S_1 (0 \mid 1)$; $S_2 (1{,}5 \mid -2)$

c) Lösungen = x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte von G_f und G_h ; Zeichnung $\rightarrow$ 1 gemeinsamer Punkt: $T(2 \mid -1)$

Lösung also x = 2 ;

Probe : $f(2) = \frac{1}{1-2} = -1$ und $h(2) = 2 - 3 = -1$ ✓

19) $\frac{4+1+5+x}{3+x} = 2 \Rightarrow 10 + x = 2(3+x) \Rightarrow x = 4$ Martina braucht noch mindestens vier Einser.

20) *Lösungsbeispiel mit zwei Variablen:* Sei x das Alter von Werner, y das Alter von Gudrun.

I: $x + y = 83$ II: $(x - 4) = 1{,}5(y - 4)$ bzw. II’: $x - 1{,}5y = 4 - 6$

$\Rightarrow$ I – II’ : $y + 1{,}5y = 83 - (-2) \Rightarrow 2{,}5y = 85 \Rightarrow y = 34$

Lösungsbeispiel mit einer Variablen: Sei x das damalige Alter von Gudrun.

Damals war Werner 1,5x Jahre alt. Heute ist Gudrun x + 4 Jahre alt, Werner 1,5x + 4 Jahre alt.

$(x + 4) + (1{,}5x + 4) = 83 \Rightarrow 2{,}5x = 83 - 8 \Rightarrow x = 30.$

Damals war Gudrun 30, Werner 45. Heute sind sie 34 bzw. 49 Jahre alt.

Es gibt zahlreiche andere Ansätze, die auch zum Ziel führen, je nachdem, welches Alter mit x bzw. y abgekürzt wird.

21) $19-2x+14<15-3x+12 \Rightarrow 33-2x<27-3x \Rightarrow x<-6 \Rightarrow \mathbb{L}=\{x \mid x<-6\}=]-\infty;-6[$

22)a) II) $\Rightarrow$ x = 3y – 4 (I´)

x in I´: – 3 (3y – 4) + 5y + 20 = 0

– 9y + 12 + 5y + 20 = 0

– 4y = – 32

y = 8 ; y in (I´) $\Rightarrow$ x = 20 ; $\rightarrow$ L = {(20 | 8) }

b) I $\Leftrightarrow$ 0,5x + 6y = 10

II $\Leftrightarrow$ 0,5x + 6y = 11

Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer.

Geometrische Bedeutung: Die Gleichungen I und II beschreiben zwei echt parallele Geraden

23) a) –5 · I) : –35x + 15y – 5a = 0

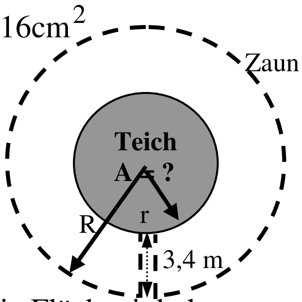
II) b x + 15y + 6 = 0 Vergleich von I) und II) $\rightarrow$ b = – 35 und –5a = 6 $\Leftrightarrow$ a = – 1,2

b) I) – II) : Lösung (0|0) heißt x = y = 0 ;

Einsetzen $\rightarrow$ c = 0 und e = 0 ; d kann jeden beliebigen Wert haben

24) Umfang: $U=\frac{1}{2}\cdot 6\text{cm}\cdot\pi+\frac{1}{2}\cdot 2\text{cm}\cdot\pi+4{,}0\text{cm}+\frac{1}{4}\cdot 8\text{cm}\cdot\pi=6\text{cm}\cdot\pi+4\text{cm}\approx 22{,}8\text{cm}$

Flächeninh.: $A=\frac{1}{2}\cdot(3\text{cm})^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot(1\text{cm})^2\cdot\pi+4{,}0\text{cm}\cdot 4{,}0\text{cm}-\frac{1}{4}\cdot(4\text{cm})^2\cdot\pi=16\text{cm}^2$



25) U = 2 · R π $\rightarrow$ R = U : (2π) = 94,6m : (2π) = 15,05 ... m

r = R – 3,4 m = 15,05 ... m – 3,4 m = 11,65 ... m

A = $r^2\pi$ = (11,65 ...m)^2 · π = 426,8 ... m^2 ≈ 430 m^2

26) A (D_1) = 0,5 · g_1 · h_1 = 0,5 · 5cm · 4cm = 10cm^2

Wenn k der (gesuchte) Abbildungsmaßstab für die Strecken ist, dann gilt für die Flächeninhalte :

k^2 = A(D_2) : A(D_1) = 90cm^2 : 10cm^2 = 9 $\Rightarrow$ k = 3 (k>0)

$\Rightarrow g_2 = k \cdot g_1 = 3 \cdot 5\text{cm} = 15\text{cm}$ und $h_2 = k \cdot h_1 = 3 \cdot 4\text{cm} = 12\text{cm}$

27) a) Wegen m ~ V berechnet man zuerst die Volumina: V_1 = (2cm)^3 = 8cm^3 ; V_2 = (3cm)^3 = 27cm^3

8cm^3 wiegen 154 g $\rightarrow$ 1cm^3 wiegt $\frac{154\,\text{g}}{8}$ $\rightarrow$ 27cm^3 wiegen $\frac{154\,\text{g}\cdot 27}{8}$ = 519,75 g ≈ $\underline{\underline{520\ \text{g}}}$

b) Hier gilt m ~ A $\Rightarrow$ Wegen 0,9 g = $\frac{1}{9}$ · 8,1 g gilt auch A´ = $\frac{1}{9}$ · A

Daraus folgt wegen A ~ r^2 : r´= $\frac{1}{3}$ · r = 7,2 cm : 3 = 2,4 cm

28) a) P ({G}) = $\frac{1}{9}$ b) P ({E}) = $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ c) P ({I}) = $\frac{2}{9}$ d) P („Konsonant“) = $\frac{4}{9}$

29) a) $P(A)=\frac{1\cdot1\cdot1\cdot1}{6\cdot6\cdot6\cdot6}=\frac{1}{6^4}=\frac{1}{1296}\approx 7{,}7\cdot10^{-4}=7{,}7\cdot10^{-4}\cdot10^2\,\%=7{,}7\cdot10^{-2}\,\%=0{,}077\%$;

b)$P(B)=\frac{6\cdot1}{6\cdot6}=\frac{1}{6}\approx 16{,}7\%$; c) $P(A)=\frac{6\cdot5\cdot4}{6\cdot6\cdot6}=\frac{5}{9}\approx 55{,}6\%$;

Hier Anwendungen des Zählprinzips, z.B:

bei b) Der erste der beiden hat 6 Möglichkeiten für seine Note, weil der andere dann aber dieselbe Note haben soll, hat er nur noch 1 Möglichkeit

bei c) bei verschiedenen Noten hat der erste 6 Möglichkeiten, der zweite 5 Mögl. und der dritte 4 Mögl.

30) $\frac{1^8}{4^8}=\frac{1}{65536}\approx 1{,}5\cdot10^{-5}=0{,}0015\,\%$ b) $\frac{3^8}{4^8}=\frac{6561}{65536}\approx 10\%$ c) $\frac{1^3\cdot3^5}{4^8}=\frac{243}{65536}\approx 0{,}37\%$