| | |
|---|---|
| Gymnasium Stein | **LÖSUNGEN** zu den Aufgaben<br>zum Grundwissenkatalog Mathematik der **9. Jahrgangsstufe** |

**1)** a) $\sqrt{x^4} + \frac{\sqrt{12x^2}}{2} - x^2 = x^2 + \frac{2\sqrt{3}|x|}{2} - x^2 = \sqrt{3}|x|$ b) $\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2 - x^2 = x^2 - 4 - x^2 = -4$

c) $\sqrt{x^2-4} - x$ kann nicht vereinfacht werden!

d) $\sqrt{980\,000\,x^3y^8} = \sqrt{\mathbf{2\cdot 49\cdot 10^4\cdot x\cdot x^2\cdot (y^4)^2}} = 7\cdot 10^2\cdot x\cdot y^4\sqrt{2x} = 700xy^4\sqrt{2x}$

*(Betragsstriche bei x vor der Wurzel hier unnötig, da für x<0 $\sqrt{x}$ nicht definiert wäre)*

e) $\sqrt{x^{\frac{1}{6}}:\sqrt{x}} = \sqrt{x^{\frac{1}{6}}:x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}}$ $(= \frac{1}{\sqrt[6]{x}})$ g) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

f) $\sqrt[6]{x^{-2}}\cdot\sqrt[3]{x} = x^{-\frac{2}{6}}\cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = x^0 = 1$ h) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{27})\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}+3$

i) $\frac{\sqrt{3x+x^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{3x+x^2}{x}} = \sqrt{3+x}$ k) $\frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{1\cdot\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x+3}}{x+3}$

l) $5\sqrt{x^{-3}}\cdot\sqrt{x^{-3}} = 5\,x^{-3}$ (nach Definition!) m) $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) = x-4$

n) $\sqrt{4x^2+12x+9} = \sqrt{(2x+3)^2} = |2x+3|$ o) $\left(16p^8\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\left(16p^8\right)^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(2p^2\right)^3 = 8p^6$

**2)** a) Radikand $6-3x \ge 0 \Leftrightarrow 2 \ge x \rightarrow D = ]-\infty; 2]$;

b) $6y > 0$ (Wurzel und Nenner) $\Leftrightarrow y > 0 \rightarrow D = \mathrm{IR}^+$;

c) $D = \mathrm{IR}$, denn $x^2+4 > 0$ für alle $x \in \mathrm{IR}$; d) $D = \mathrm{IR}$, denn Nenner nie 0 und Radikand $= 5 > 0$

e) $x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4 \rightarrow D = ]4; \infty[$ f) Nenner $= x^2-4 = (x-2)(x+2) \neq 0 \rightarrow D = \mathrm{IR} \setminus \{-2; 2\}$;

g) Radikand $x^2-4 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 4 \Leftrightarrow |x| \ge 2 \rightarrow D = ]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$ $(= \mathrm{IR} \setminus ]-2; 2[\,)$

**3)** a) $x^2 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 5$; $L = \{0; 5\}$

b) $x^2 = 5x + 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{5\pm\sqrt{25+56}}{2} = \frac{5\pm 9}{2}$; $L = \{-2; 7\}$

c) $18x^2 - 2 = 0 \mid :2 \Leftrightarrow 9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9}$; $L = \{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\}$

d) $2t^2 - t + 1 = 0$; Diskriminante $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\cdot 2 = -7 < 0 \Rightarrow L = \{\}$

e) $2y^2 = y + 1 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$; $D = 9$; $L = \{-\frac{1}{2}; 1\}$;

f) $u^2 + 1 = 4u \Leftrightarrow u^2 - 4u + 1 = 0$; $D = 12$; $L = \{2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\}$;

g) $2x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$; $L = \{0; 2\}$;

h) $x^3 = 4x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-2) = 0$; $L = \{-2; 0; 2\}$;

i) $x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *($x^2 + 4$ wird in IR nie 0)*; $L = \{0\}$;

j) $(9x^2+1)(x+9) = 0 \Leftrightarrow x + 9 = 0$ *($9x^2 + 1$ wird in IR nie 0)*; $L = \{-9\}$;

k) $(x^2+9x)(2x-9) = 0 \Leftrightarrow x(x+9)(2x-9) = 0 \rightarrow L = \{-9; 0; 4{,}5\}$;

l) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow L = \{3\}$

m) $x^2 - 6x + 9 < 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 < 0$ Widerspruch $\rightarrow L = \{\}$;

n) $\frac{1}{2x} = \frac{x}{4{,}5} \mid \cdot 9x \Leftrightarrow \frac{9}{2} = 2x^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} = x^2$; $L = \{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}$ bzw. schöner $L = \{-1{,}5; 1{,}5\}$

o) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} = 1 \mid \cdot x(x+1)$; $x - 2(x+1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$; $D = 4 - 4\cdot 2 = -4 < 0 \Rightarrow L = \{\}$

p) $\frac{2+3x}{x-5} = 0 \Leftrightarrow 2 + 3x = 0$ *(Bruch wird 0, wenn der Zähler 0 wird)*; $L = \{-\frac{2}{3}\}$;

q) $\frac{x^2+4}{4-x} = 0$ *Zähler in IR immer positiv → Bruch =0 unmöglich* ⇒ L = { }   r) L = { }, da Zähler =3 ≠ 0;

s) $\sqrt{x+7} - x = 1 \iff \sqrt{x+7} = x + 1 \mid (..)^2 \Rightarrow x + 7 = (x+1)^2 \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff$

$\iff x_1 = 2$ ; $x_2 = -3$;   Probe liefert Widerspruch für $x_2 = -3$; also L = {2}

t) $\sqrt[4]{z^3} = 10^6 \iff z^{\frac{3}{4}} = 10^6 \mid (...)^{\frac{4}{3}} \iff x = (10^6)^{\frac{4}{3}} = 10^8$ ; $L = \{10^8\}$

u) $\sqrt[3]{2x+1} - 2 = 0 \iff (2x+1)^{\frac{1}{3}} = 2 \mid (...)^3 \iff 2x + 1 = 8 \iff x = 3{,}5$ ; Probe o.k. → L = {3,5}

v) $(x-1)(x+3) = 0$; Lösungen direkt ablesbar **(nicht ausmultiplizieren!):**   L = { – 3 ; 1 }

w) $(x-1)(x+3) = -4$; ausmultiplizieren → $x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0$ → L = { – 1}

x) $(x-1)^2 = -4$   Widerspruch *(Quadrat in IR nie negativ)* ! → L = { }

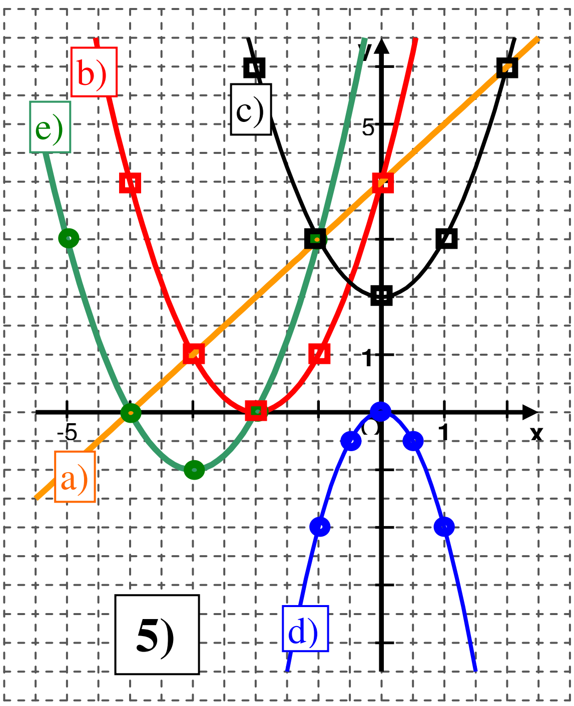
y) $(x-1)^2 = 4 \iff |x-1| = 2$ oder $x_{1/2} - 1 = \pm 2$ ; $x_1 = 3$ ; $x_2 = -1$ ;  L = { – 1 ; 3 }

z) $(x+1{,}8)^3 + 0{,}027 = 0 \iff (x+1{,}8)^3 = -0{,}027 \iff x + 1{,}8 = -\sqrt[3]{0{,}027} = -0{,}3$;  L = { – 2,1 }

**4)** a) $y = (x-3)(x+1)$ ;

b) $y = a(x-2)^2 + 3$ ; R(1|7) ∈ ***P*** ⇒ $7 = a(1-2)^2 + 3$ ⇒ a = 4 → $y = 4(x-2)^2 + 3$

c) $y = -x \cdot (x-6) = 6x - x^2$




**5)** b) S(–2|0); verschobene Normalparabel → z.B.:
von S um 1 nach rechts bzw. links → um 1 nach oben;
und um 2 nach rechts bzw. links → um 4 nach oben

c) S(0|2) sonst wie b)

d) S(0|0);  d(0,5) = – 0,5;  d(1) = –1; Symmetrie!

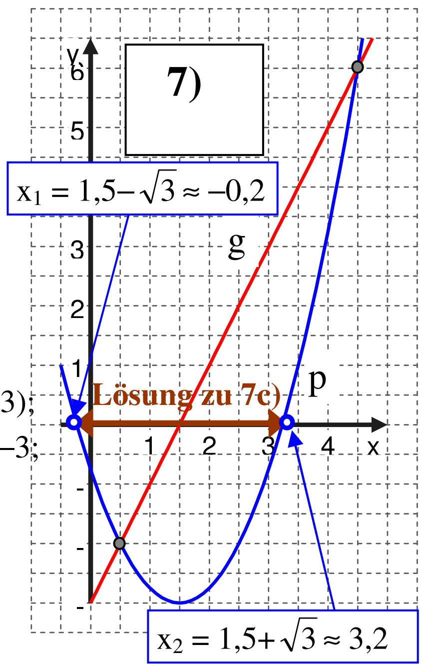
e) Nst.: $x_1 = -2$; $x_2 = -4$ ; → $x_s = -3$ ; $y_s = e(-3) = -1$

**6)** a) $y = -x^2 + 3$;   b) $y = (x+3)^2 - 4$ ;

c) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$ ;   d) $y = (x+4)^2$ ;

e) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ ;  t = 2;  → $y = 0{,}4\,x + 2$

f) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$ ; → $y = -\frac{1}{3}\,x$ ;




**7)** a) Schnittpunkte → Gleichsetzen : $x^2 - 3x - 0{,}75 = 2x - 3$;

$x^2 - 5x + 2{,}25 = 0$;  $x_1 = 4{,}5$;  $x_2 = 0{,}5$;

zugehörige y-Koordinaten bestimmen durch Einsetzen in $y = 2x - 3$

→ Schnittpunkte: $S_1\,(4{,}5 \mid 6)$;  $S_2\,(0{,}5 \mid -2)$

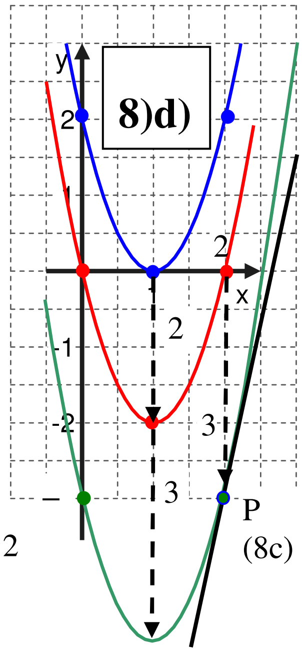
b) Scheitelbestimmung durch quadratische Ergänzung:

$x^2 - 3x - 0{,}75 = x^2 - 3x + (1{,}5)^2 - (1{,}5)^2 - 0{,}75 = (x - 1{,}5)^2 - 3$;  S (1,5 | –3);

oder Nst.: $x_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{3}$ ⇒ $x_s = 1{,}5$ („Mitte“); $y_s = 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 - 0{,}75 = -3$;

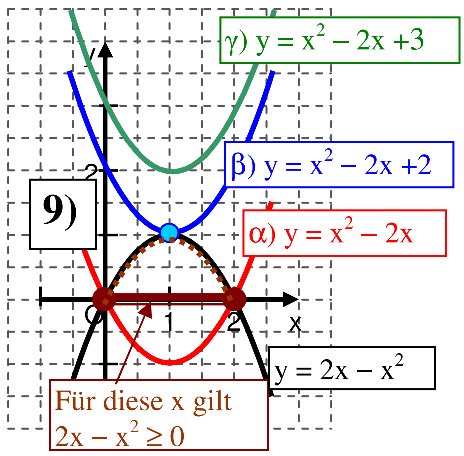
c) Zeichnung → für alle x zwischen den beiden Nullstellen sind die Funktionswerte der Parabel negativ → L = ] $1{,}5 - \sqrt{3}$ ; $1{,}5 + \sqrt{3}$ [

**8)** a) Die Parabel hat mit der x-Achse (Gleichung $y = 0$) nur einen Punkt gemeinsam, wenn die Gleichung $2x^2 - 4x - t = 0$ genau eine Lösung hat, wenn also die Diskriminante $D = 0$ ist $\Rightarrow D = (-4)^2 + 4 \cdot 2\,t = 16 + 8t = 0$
=> für **t = –2** hat die Parabel mit der x-Achse nur einen Punkt gemeinsam,
dann gilt (wegen D = 0): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{+4}{2 \cdot 2} = 1$ => Scheitelpunkt $S(1 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse $\rightarrow$ $x = 0 \Rightarrow y = -t = +2$; => $S_y\,(0 \mid 2)$




b) p: $y = 2x^2 - 4x - t$ soll durch den Ursprung (0 ; 0) gehen;
$p\,(0) = 0$; => $-t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ $\rightarrow$ p: $\mathbf{y = 2x^2 - 4x}$**;**
2. Schnittpunkt mit der x-Achse:
$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0$; $2x\,(x - 2) = 0$ => $x_2 = 2$; $S_x(\,2 \mid 0)$;
Scheitel: $x_s = 0{,}5\,(\,0 + 2\,) = 1 \rightarrow y_s = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2$ oder
$x^2 - 4x = 2\,(x^2 - 2x + 1 - 1) = 2\,(x^2 - 2x + 1) - 2 = 2\,(x - 1)^2 - 2$; $\rightarrow S\,(1 \mid -2)$;
oder: die Parabel aus b) entsteht aus der Parabel von a) durch Verschiebung um 2 nach unten $\rightarrow$ Verschiebung des Scheitels: $S_a\,(1|0) \rightarrow S_b(1|-2)$

c) ein gemeinsamer Punkt für p und g $\Leftrightarrow$ eine Lsg. für $2x^2 - 4x - t = 4x - 11$
$\Leftrightarrow$ eine Lsg. für $2x^2 - 8x + 11 - t = 0$ $\Leftrightarrow$ Diskriminante $D = 64 - 4 \cdot 2 \cdot (11 - t\,) = 0 \Leftrightarrow t = 3$
$\rightarrow$ p: $\mathbf{y = 2x^2 - 4x - 3}$**;** *(noch mal um 3 nach unten)*
Berührpunkt P : $x = \dfrac{-(-8)}{2 \cdot 2} = 2$; $y = 4 \cdot 2 - 11 = -3$; $B(2|-3)$




**9)** a) **L = [0;2]**
b) α) z.B.: Alle Vorzeichen ändern $\rightarrow y = x^2 - 2x$ $\rightarrow$
$\rightarrow$ Spiegelung an der x-Achse $\rightarrow$ die beiden Nullstellen bleiben
β) z.B.: α um 2 nach oben schieben $\rightarrow y = x^2 - 2x + 2$
nur noch gemeinsamer Scheitelpunkt (1|1)
γ) z.B.: α um 3 nach oben schieben $\rightarrow y = x^2 - 2x + 3$

**10)** $E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \mid \cdot \frac{2}{m}$; $\frac{2E}{m} = v^2$; $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ für $v \geq 0$;

α) v wird verfünffacht ➔ E wird fünfundzwanzig mal so groß, denn $E \sim v^2$ (kurz : $v' = 5v \Rightarrow E' = 25\,E$)
β) v wird halbiert ➔ E wird geviertelt (kurz : $v' = 0{,}5\,v \Rightarrow E' = 0{,}25\,E$)

**11)** Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck BMP: $\overline{BP}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{MB}^2 = (20\text{cm})^2 - (5\text{cm})^2 = 375\text{ cm}^2$
=> $\overline{BP} = 5\sqrt{15}$ cm => $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{MP}} = \dfrac{5\sqrt{15}}{20} = \dfrac{\sqrt{15}}{4} \approx 96{,}8\ \%$. $\rightarrow$ $\overline{\text{BP}}$ ist um ca. 3,2 % kleiner als $\overline{MP}$.

**12)** $r = \overline{MP} = \sqrt{(-10-(-18))^2 + (7-(-3))^2} = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$.

**13)** Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck YPA: $\overline{AP} = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3567{,}41}$ m $\approx 59{,}7$ m;

Höhensatz im großen Dreieck: $\overline{AP}^2 = b \cdot p$ => $p = \dfrac{\overline{AP}^2}{b} = \dfrac{3567{,}41\text{m}^2}{17{,}0\text{m}} \approx 209{,}8$ m;

Pythagoras im rechten Teildreieck: $x = \sqrt{p^2 + \overline{AP}^2} \approx \sqrt{47583{,}45}$ m $\approx 218$ m.

oder: Kathetensatz im großen Dreieck $\rightarrow$ $\overline{YX} = a^2 : b = \ldots$ ; $x = \sqrt{\overline{YX}^2 - a^2} \approx \sqrt{47583{,}45}$ m $\approx 218$ m.

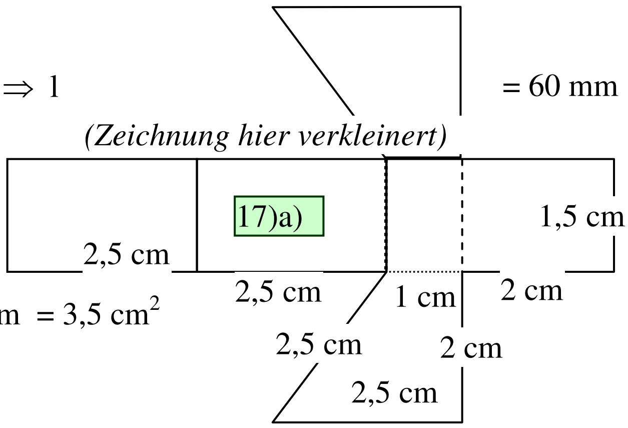
**14)** Die Diagonale d des Schrankes muss kleiner als 2,50 m sein. Für die Schrankhöhe h gilt mit
Pythagoras: $h < \sqrt{d^2 - t^2} = \sqrt{(2{,}5\text{m})^2 - (0{,}6\text{m})^2} = \sqrt{5{,}89}\text{ m} = 2{,}4269322\ldots$ m
Der Schrank darf höchstens 2,42 m hoch sein.

**15)** Die Raumdiagonale d des Quaders muss **mindestens so groß** sein wie die Länge der Nadel *(praktisch: wegen der Dicke der Nadel **größer** als deren Länge)*

Grenzfall: $d = \sqrt{1^2 + (51mm)^2 + (32mm)^2} = 85$ mm $\Rightarrow$ 1 = 60 mm

$\rightarrow$ Die Schachtel muss länger sein als 60 mm

*(Zeichnung hier verkleinert)*




**16)** a = 8 cm; $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}\cdot 64}{4}cm^2 = 16\sqrt{3}\ cm^2$.

**17)** b) Volumen : $V_P = G_P \cdot h_P$ ,

wobei $G_P$ = Trapezfläche = $\frac{1}{2}(2{,}5cm + 1cm)\cdot 2cm = 3{,}5\ cm^2$

und $h_P = 1{,}5$ cm

$\rightarrow$ <u>Volumen:</u> $V_P = 3{,}5\ cm^2 \cdot 1{,}5\ cm = \underline{\underline{5{,}25\ cm^3}}$

<u>Oberfläche</u>: $O_P = 2 \cdot G_P +$ A (Rechteck; *siehe Netz!*) =

$= 2 \cdot 3{,}5\ cm^2 + (2{,}5cm + 2{,}5cm + 1cm + 2cm)\cdot 1{,}5cm = \ldots = \underline{\underline{19\ cm^2}}$

**18)** $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ ; $h = d = 2r \rightarrow$ $\mathbf{V} = \frac{1}{3} r^2 \pi\, 2r = \frac{2}{3} r^3 \pi$ also $\frac{2}{3} r^3 \pi = 1dm^3$

$\Rightarrow r^3 = \frac{3}{2\pi} dm^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}\ dm = 0{,}781\ldots\ dm \quad \rightarrow \quad h = 2r = 1{,}56\ldots\ dm \approx 1{,}6\ dm$

**19)** a) $O = 8G \Leftrightarrow 2r^2\pi + 2r\pi h = 8\ r^2\pi h \Leftrightarrow 2r\pi h = 6\ r^2\pi h \Leftrightarrow h = 3r$

b) $V = r^2\pi h = r^2\pi \cdot 3r = 3r^3\pi = 3\cdot(25cm)^3\pi = 147262{,}1...\ cm^3 \approx 150$ Liter

**20)** $V = V_{Prisma} + 2\ V_{Pyramide} = (\frac{1}{2}\cdot 6m\cdot 5m)\cdot 8m + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot(6m\cdot 3m)\cdot 5m = 15m^2\cdot 8m + \frac{4}{3}\cdot 9m^2\cdot 5m = 180m^3$

$O = 2\ A_{Trapez} + 2\ A_{Dreieck}$ ;

Für die Höhe $h_s$ im Dreieck gilt mit Pythagoras: $h_s = \sqrt{h^2 + (3m)^2} = \sqrt{(5m)^2 + 9m^2} = \sqrt{34}m$;

$h_s$ ist auch die ‚Höhe' im Trapez;

$O = 2\cdot\frac{8m+14m}{2}\cdot\sqrt{34}m + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6m\cdot\sqrt{34}m = 22\sqrt{34}m^2 + 6\sqrt{34}m^2 = 28\sqrt{34}m^2$

**21)** a) $\tan\alpha = 0{,}15 \Rightarrow \alpha = 8{,}53\ldots° \approx 8{,}5°$

b) g: y = mx + t mit Steigung $m = \tan 60° = \sqrt{3}$ und y-Abschnitt $t = -3$ $\rightarrow$ g: $y = \sqrt{3}x - 3$

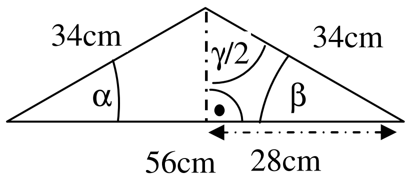
c) $2x - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow$ Steigung = $\frac{2}{3}$; $\tan\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha \approx 34°$

$S_y(0 \mid \frac{4}{3})$ ; $y = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow S_x(-2 \mid 0)$

**22)** $\cos\delta = \frac{3m}{4m} = 0{,}75 \Rightarrow \delta = 41{,}4\ldots° \approx 41°$ ; $\sin 20° = \frac{y}{3m} \Rightarrow y = 3m\cdot\sin 20° = 1{,}02\ldots m \approx 1{,}0m$

**23)** Hier gleichschenkliges Dreieck

$\Rightarrow$ Winkelhalbierende $w_\gamma$ = Seitenhalbierende = Höhe




$\Rightarrow \cos\beta = \frac{28cm}{34cm} = \frac{14}{17} \Rightarrow \alpha = \beta$ *(Basiswinkel gleich groß)*$= 34{,}5\ldots° \approx 35°$

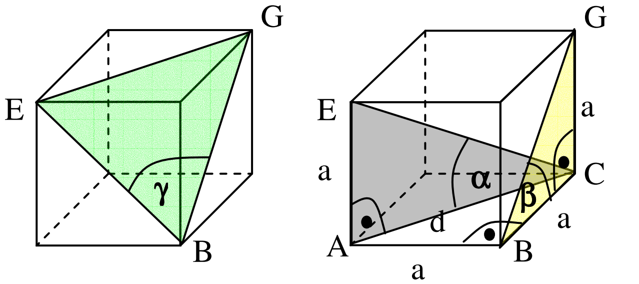
$\Rightarrow \gamma = 180° - 2\beta = 110{,}8\ldots° \approx 111°$

**24)** a) rechtwinkliges Stützdreieck ACE:

$\tan\alpha = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 35{,}26\ldots° \approx 35°$

b) Stützdreieck BCG ist gleichschenklig $\Rightarrow \beta = 45°$

c) $\Delta$ EBG ist gleichseitig $\Rightarrow \gamma = 60°$



**25)** *Baumdiagramm zur Veranschaulichung nützlich; hier aus Platzgründen nicht gezeichnet*

a) $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$ (≈ 57,9 % ) ; *oder mit der Def. der Laplacewahrscheinlichkeit:* $P(A) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5^3}{6^3}$

b) $P(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} = \frac{25}{72}$ (≈ 34,7 %)

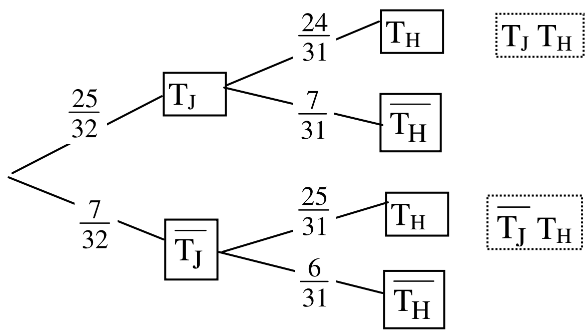
*6 beim 1.Wurf oder beim 2.Wurf oder beim 3. Wurf ; auch hier wieder mit Laplacewskt. möglich*

c) P(C) = P( keine Sechs oder genau eine Sechs) = $P(A) + P(B) = \frac{200}{216} = \frac{25}{27}$ (≈ 92,6 % )

d) Das Gegenereignis zu D = „höchstens eine Sechs" ist $\overline{D}$ = „gar keine Sechs" = A ⇒

$\Rightarrow P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(A) = \frac{91}{216}$ (≈ 42,1 % )

**26)** Ereignisse: $T_H$ = Hans hat einen Treffer ; $T_J$ = Jana hat einen Treffer




$\frac{25}{32}\cdot\frac{24}{31}$

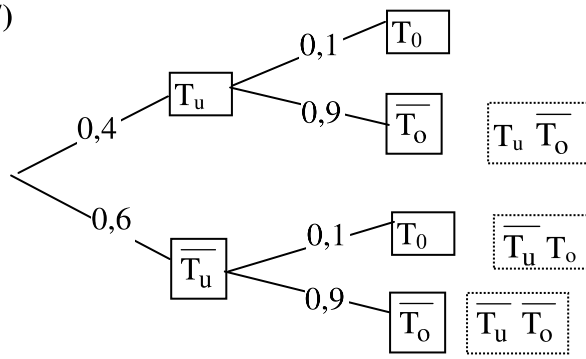
$\frac{7}{32}\cdot\frac{25}{31}$

$P(T_H) = \frac{25}{32}\cdot\frac{24}{31} + \frac{7}{32}\cdot\frac{25}{31} = \frac{25\cdot(24+7)}{32\cdot 31} = \frac{25}{32}$

$P(T_J) = \frac{25}{32} = P(T_H)$

Beide haben also die gleiche Chance!

**27)**



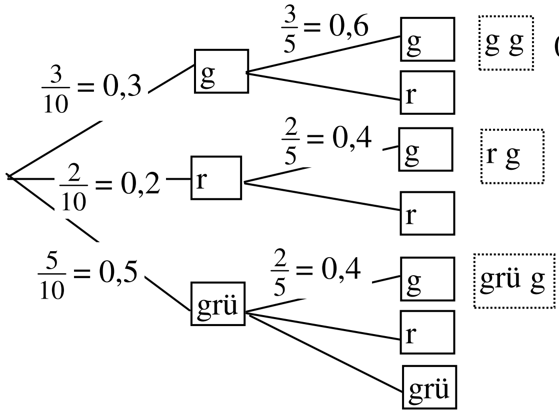

0,4 · 0,9

0,6 · 0,1

P(A) = 0,4 · 0,9 + 0,6 · 0,1 = 42 %

P(B) = 0,6 · 0,9 = 54 %

**28)**




0,3 · 0,6

0,2 · 0,4

0,5 · 0,4

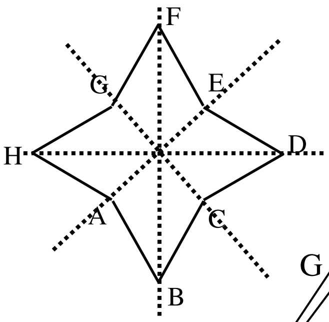
Eva zieht einen gelben Bonbon mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 · 0,6 + 0,2 · 0,4 + 0,5 • 0,4 = 46 %

**29)** Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ABC liefert: $\overline{AB} = \sqrt{(3km)^2 + (6km)^2} = 3\sqrt{5}$ km ;

$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t_{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{v_{AB}} = \frac{3\sqrt{5}\,km}{30\frac{km}{h}} = \frac{\sqrt{5}}{10}h \approx 0{,}22h$; $t_{Hauptstraße} = \frac{3km+6km}{50\frac{km}{h}} = \frac{9}{50}h = 0{,}18h$ ;

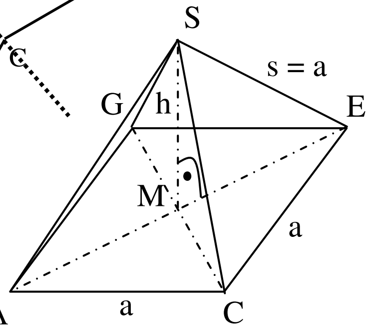
=> keine Zeitersparnis

Gesucht: v für $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$ km, so dass t < 0,18 h; $v = \frac{s}{t} = \frac{3\sqrt{5}\,km}{0{,}18\,h} = 37{,}26...\frac{km}{h}$ => lohnt ab $v = 38\,\frac{km}{h}$.

**30)** 


a) Der Stern hat 4 Symmetrieachsen.

b) Konstruiere zuerst das Quadrat ACEG und dann über jeder Quadratseite ein gleichseitiges Dreieck (z.B. F = k ( G; r = a ) $\cap$ k ( E; r = a) )




c) Die Pyramide hat die Kantenlänge s = a ;

halbe Grundflächendiagonale $\overline{ME} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

Pythagoras im $\Delta$ MES : $h^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (= 3,53 ... cm)

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2} = \frac{1}{6} (5\,\text{cm})^3 \sqrt{2} = 29{,}46 \,..\, \text{cm}^3 \approx 29\ \text{cm}^3$ (2 g.Z.)

d) Die Länge der Strecke [AB] ist die Seitenkante s der Pyramide. Diese muss länger sein als die halbe Grundflächendiagonale : $s > \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ; für $\overline{AB} \le \frac{1}{2}\overline{AC}\sqrt{2}$ also keine Pyramide möglich

*(vgl. Skizze; je kürzer s, desto flacher die Pyramide; für* $s = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ *ist die Pyramide „platt“ )*

**31)** a) $A_{Trapez} = \frac{15+3}{2} \cdot 8 = 72.$ b) F (2 | y); $A_{Rechteck} = 2 \cdot y = 2 \cdot 12 = 24.$

c) Die Gerade CD hat die Gleichung g: y = m · x + 15, denn 15 ist die y-Koordinate von D.
Wegen $C(8|3) \in g$ gilt: 3 = m · 8 + 15; -12 = 8m; m = -1,5; => g: y = -1,5 x +15.
Wegen $F \in g$ hat F die Koordinaten F (x | -1,5x+15), für die Fläche gilt also
A(x) = x · (-1,5x+15) = -1,5 x² +15 x = 15 x – 1,5 x² *( = 15·x·( -10+x) )*

d) A(x) = -1,5x² + 15x = -1,5 (x² - 10x + 5² -5²) = - 1,5 (x - 5)² + 37,5 => die zugehörige Parabel ist nach unten geöffnet und hat als ‚höchsten Punkt' den Scheitel S(5 | 37,5)

⇨ max. Flächeninhalt für x = 5. *(oder $x_{Scheitel}$ = Mittelwert der beiden Nullstellen 0 und 10)*

**32)** a) $V = V_{Quader} + V_{Pyramide} = 2{,}4m \cdot 3{,}0m \cdot 2{,}0m + \frac{1}{3} \cdot 2{,}4m \cdot 3{,}0m \cdot 3{,}0m = 14{,}4m^3 + 7{,}2m^3 = 21{,}6m^3.$

b) Vorderansicht → für die ‚Breite' b gilt: $\frac{b}{3{,}0m} = \frac{1{,}0m}{3{,}0m}$ => b = 1,0 m (2. Strahlensatz, V-Figur);

Seitenansicht → für die ‚Tiefe' t gilt: $\frac{t}{2{,}4m} = \frac{1{,}0m}{3{,}0m}$ => t = 0,8 m (2. Strahlensatz, V-Figur);

⇨ Wasseroberfläche A = 1m · 0,8 m = 0,8 m² *oder kürzer :*

*zentr. Steckung der Pyramidengrundfläche mit Faktor* $(\frac{1m}{3m})^2$ : $A = \frac{1}{9} \cdot 2{,}4m \cdot 3m = 0{,}8\ m^2$

c) Wasserhöhe h = Pyramidenhöhe = 1,5 m (oberhalb von A)
Vorderansicht, für die ‚Breite' b gilt: $\frac{b}{3m} = \frac{1{,}5m}{3{,}0m}$ => b = 1,5 m (2. Strahlensatz, V-Figur);

Seitenansicht, für die ‚Tiefe' t gilt: $\frac{t}{2{,}4m} = \frac{1{,}5m}{3{,}0m}$ => t = 1,2 m (2. Strahlensatz, V-Figur);

⇨ Wasservolumen $V = \frac{1}{3}\ G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1{,}5\ m \cdot 1{,}2\ m \cdot 1{,}5m = 0{,}9\ m^3 = 900\ l$ *(oder kürzer :* $V = (\frac{1}{2})^3 \cdot 7{,}2m^3$*)*

d) <u>**E**</u>, denn zuerst steigt die Höhe schnell an (wegen der „Enge“ bei A),dann steigt sie wegen der größer werdenden Grundfläche der „Wasserpyramide“ immer langsamer an; im Quaderteil dann <u>linearer</u> Zusammenhang mit der Zeit; sobald der Tank voll ist, bleibt die Wasserhöhe konstant (also nicht B)
*Genauer : a) →* $V_{Quader} = 2 \cdot V_{Pyramide}$ *⇒ Die Füllung des Quaders (↔Geradenstück) dauert doppelt so lang wie die Füllung der Pyramide (↔krummer Diagrammteil), dann ist der Tank voll!*